



กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง (พหุนาม)

และฟังก์ชัน (function)

ฟังก์ชัน คือ สมการความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y โดยมีค่า x แทนปริมาณใดๆที่ป้อนเข้าไปใน การความสัมพันธ์แล้วทำให้เกิดค่า y แทนปริมาณใดๆที่เป็นผลลัพธ์

หัวใจสำคัญ!!!! สมการความสัมพันธ์ระหว่างค่า x และ y ที่จะสามารถเรียกว่า **ฟังก์ชัน**

ได้นั้น คือ **เมื่อป้อนค่า x ลงในสมการความสัมพันธ์นั้นๆ แล้ว จะต้องได้ค่า y เพียงค่าเดียว เท่านั้น**

ตัวอย่าง จงพิจารณาสมการความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

1) $y = 2x - 3$	<input type="radio"/> เป็นฟังก์ชัน <input type="radio"/> ไม่เป็นฟังก์ชัน	2) $y = 2x^2 - 3$	<input type="radio"/> เป็นฟังก์ชัน <input type="radio"/> ไม่เป็นฟังก์ชัน
3) $ y = x - 2$	<input type="radio"/> เป็นฟังก์ชัน <input type="radio"/> ไม่เป็นฟังก์ชัน	4) $y = 2x^2$	<input type="radio"/> เป็นฟังก์ชัน <input type="radio"/> ไม่เป็นฟังก์ชัน

**เอกสารตัวเต็มไม่มีลายน้ำ
มีจำนวน 111 หน้า**

รูปแบบการเขียนฟังก์ชันสามารถเขียนได้ 2 รูปแบบ ซึ่งก็จะมีลักษณะการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่า x และ y ที่แตกต่างกัน แต่ก็ยังมีความหมายเดียวกันในการนำเสนอความสัมพันธ์ระหว่างค่า x และ y ดังตัวอย่างดังต่อไปนี้

รูปแบบที่ 1	รูปแบบที่ 2
หาก $y = 4x - 7$ จงหาค่าของ y เมื่อ $x = 3$	หาก $f(x) = 4x - 7$ จงหาค่าของ $f(3)$

ตัวอย่าง จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$f(x) = 7x + 3$$

$$g(x) = x^2 - 3$$

$$h(x) = 2x^2 - x - 5$$

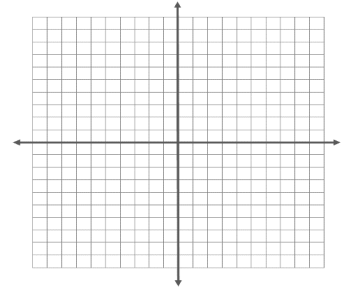
จงหาค่าของ

1) $f(2)$

2) $g(3)$

3) $h(-4)$

จากสมการความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ที่สอดคล้องกับสมการ
 นั้นๆ เมื่อนำค่า (y) ที่ใด ๆ เขียนแสดงเป็นจุดลงในแกนพิกัด x และ y ซึ่ง
 เราจะเรียกว่า **จุดพิกัด** ซึ่งจุดที่ได้จากสมการความสัมพันธ์นั้นที่เรียงต่อกัน
 กันจนเล็กลงมาเรื่อยๆ เรียกว่า **กราฟ**



เมื่อฟังก์ชันคือสมการความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y นั้นความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันก็ย่อมมีกราฟ
 ได้เช่นเดียวกัน สำหรับในหัวข้อนี้เราจะมาหาคำศัพท์เกี่ยวกับ **กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง** ซึ่งเราอาจจะเรียก
 ฟังก์ชันกำลังสองนี้ว่า **สมการพาราโบลา** ได้ ฉะนั้นลักษณะของสมการและกราฟจะเป็นอย่างไรนั้นจะอธิบาย
 ในลำดับต่อไป

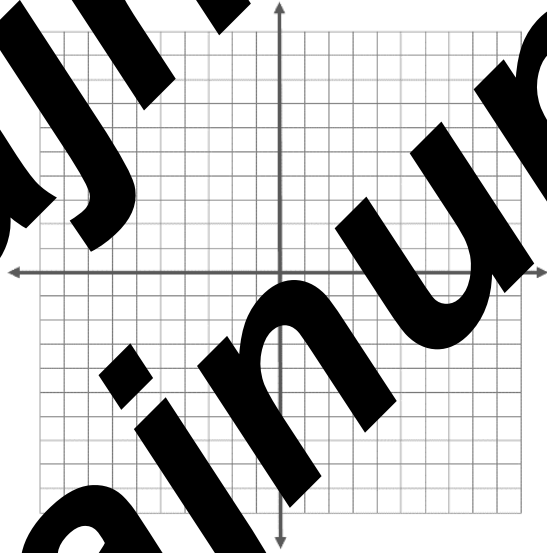


ajnunu.com

ลักษณะสมการความสัมพันธ์ของ x, y ที่ทำให้เกิดกราฟพาราโบลา

ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งวาดกราฟ

ตัวอย่างที่ 1 สมการ $y = x$



x									
y									

จากตารางข้างบนจะได้จุดคู่อันดับ (x,y) ที่จะป็นแนวของกราฟที่จะเกิดขึ้น ดังนี้ _____

จะสังเกตได้ว่าลักษณะของกราฟที่เกิดขึ้นนั้นมีลักษณะ

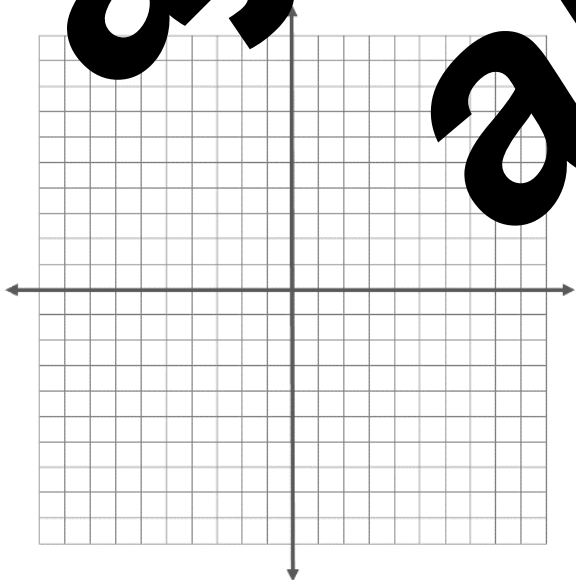
เป็น _____ จึงเรียกความสัมพันธ์(สมการ) _____

ว่า _____

ตัวอย่างที่ 2 สมการ $y = x^2$

x									
y									

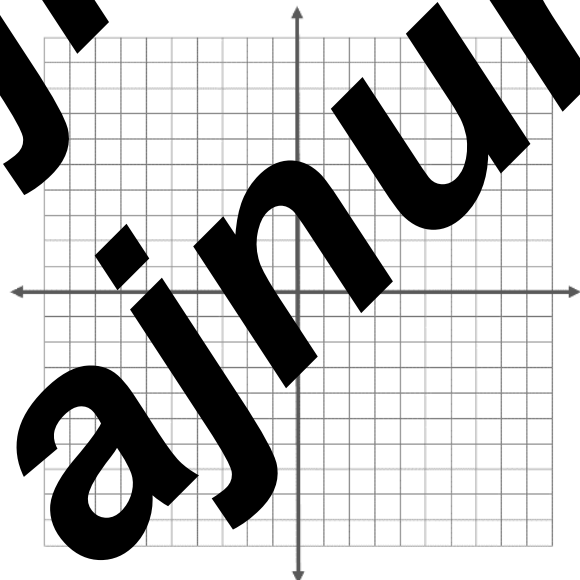
จากตารางข้างบนจะได้จุดคู่อันดับ (x,y) ที่จะป็นแนวของกราฟที่จะเกิดขึ้น ดังนี้ _____



ตัวอย่างที่ 3 สมการ $y = -x^2$

x									
y									

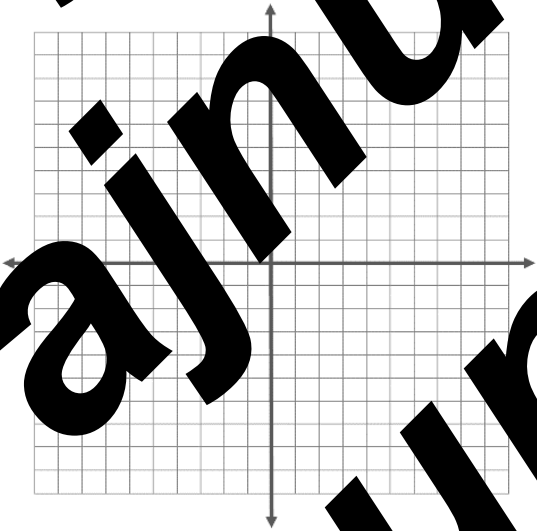
จากตารางข้างบนจะได้จุดคู่อันดับ (x,y) ที่จะป็นแนวของกราฟที่จะเกิดขึ้น ดังนี้ _____



ตัวอย่างที่ 4 สมการ $x = y^2$

x							
y							

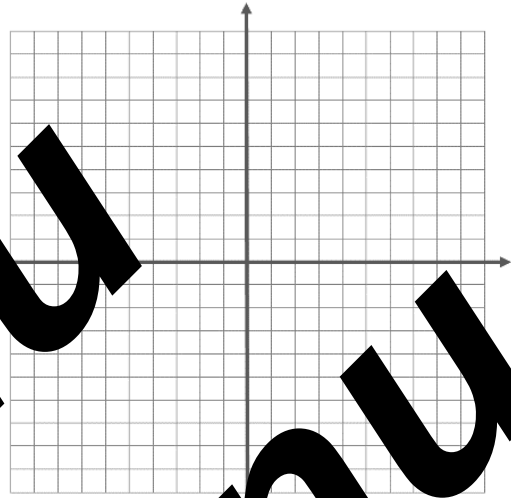
จากตัวอย่างข้างบนจะได้จุดคู่อันดับ (x,y) ที่จะเป็น
แนวของกราฟที่จะเกิดขึ้น ดังนี้




ตัวอย่างที่ 5 สมการ $x = -y^2$

x							
y							

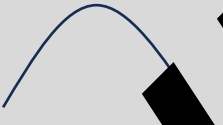
จากตัวอย่างข้างบนจะได้จุดคู่อันดับ (x,y) ที่จะเป็น
แนวของกราฟที่จะเกิดขึ้น ดังนี้



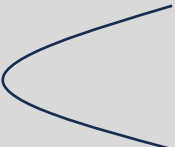
จากลักษณะสมการที่สัมพันธ์กันของ x กับ y ของตัวอย่างที่ 2-5 นี้ จะสังเกตเห็นได้ว่าพจน์ของตัวแปร x หรือพจน์ในพจน์ใดพจน์หนึ่ง หรือพจน์หนึ่ง ส่วนอีกพจน์หนึ่งจะมีดีกรีสูง ซึ่งจึงสังเกตได้ว่ากราฟที่เกิดขึ้นนั้นจะมีลักษณะเป็นเส้นโค้งที่ปลายของเส้นโค้งนั้น พุ่งออกไปในทางเดียวกันและบานออกไปได้เรื่อยๆแบบสมมาตรกัน เรียกลักษณะของกราฟดังกล่าวว่า _____ และเรียกสมการดังกล่าวนี้ว่า _____ ซึ่งจะแบ่งลักษณะของกราฟออกได้ 4 ลักษณะ ดังนี้



ลักษณะของกราฟพาราโบลาที่ปลายเปิดด้านบน
เรียกว่า _____



ลักษณะของกราฟพาราโบลาที่ปลายเปิดด้านล่าง
เรียกว่า _____

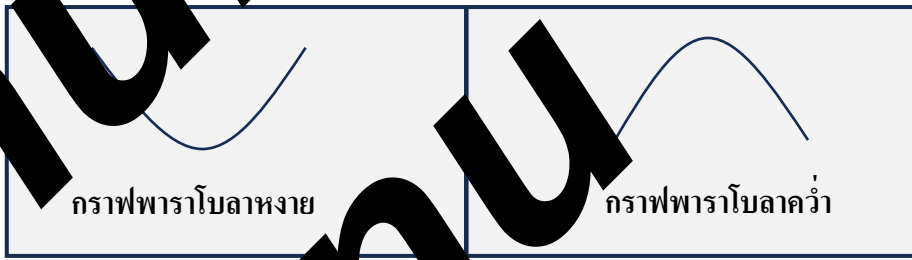


ลักษณะของกราฟพาราโบลาที่ปลายเปิดด้านขวา
เรียกว่า _____



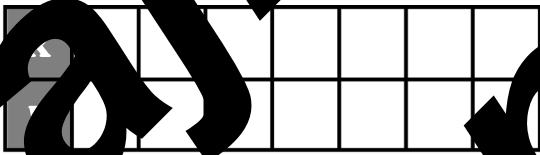
ลักษณะของกราฟพาราโบลาที่ปลายเปิดด้านซ้าย
เรียกว่า _____

สำหรับหัวข้อนี้กราฟของพาราโบลาที่เราจะทำการศึกษานั้น จะมีเพียงแค่ 2 ลักษณะ คือ



นั้น สมการความสัมพันธ์ของ x ที่เราจะศึกษานั้น จะประกอบไปด้วยพจน์ของตัวแปร y ที่มีดีกรีหนึ่ง ส่วนพจน์ของตัวแปร x นั้นจะมีดีกรีสูงสุดคือสอง โดยอาจจะมีพจน์ของตัวแปร x ที่มีดีกรีหนึ่งประกอบอยู่ด้วยก็ได้ ตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง สมการ $y = 2(x + 1)^2$



จากตารางข้างบนจะได้จุดคู่อันดับ (x, y) ที่จะเป็นแนวของกราฟที่จะเกิดขึ้น ดัง

สมการที่เขียนใหม่ $y = 2(x + 1)^2$

จะเห็นได้ว่าสมการพาราโบลาที่กำหนดเดิมนั้น อาจเขียนให้อยู่ในรูปสมการที่มีพจน์ของตัวแปร x ที่มีดีกรีสองและพจน์ของตัวแปร x ที่มีดีกรีหนึ่งรวมกันอยู่ในสมการได้ด้วย

จากตัวอย่างข้างต้นจึงขอสรุปว่า สมการความสัมพันธ์ของ x กับ y ที่อยู่ในรูปหรือสามารถจัดให้อยู่

ในรูปของ

จะเป็นสมการพาราโบลา

ตัวอย่าง จงพิจารณาสมการต่อไปนี้ และชี้แจงให้ว่าเป็นสมการกราฟพาราโบลาหรือไม่

1) $y = 3x^2 - 4x + 5$

เป็นสมการพาราโบลาเพราะสามารถอยู่ในรูป

$y = ax^2 + bx + c$ มี $a = \underline{\quad}$, $b = \underline{\quad}$, $c = \underline{\quad}$

ไม่เป็นสมการพาราโบลา

2) $y = 4x - 7 - 5x^2$

เป็นสมการพาราโบลาเพราะสามารถอยู่ในรูป

$y = ax^2 + bx + c$ มี $a = \underline{\quad}$, $b = \underline{\quad}$, $c = \underline{\quad}$

ไม่เป็นสมการพาราโบลา

3) $y^2 = x^2 + 3x - 1$

เป็นสมการพาราโบลาเพราะสามารถอยู่ในรูป

$y = ax^2 + bx + c$ มี $a = \underline{\quad}$, $b = \underline{\quad}$, $c = \underline{\quad}$

ไม่เป็นสมการพาราโบลา

4) $6x^2 + 4y = 0$

เป็นสมการพาราโบลาเพราะสามารถอยู่ในรูป

$y = ax^2 + bx + c$ มี $a = \underline{\quad}$, $b = \underline{\quad}$, $c = \underline{\quad}$

ไม่เป็นสมการพาราโบลา

5) $\frac{1}{y} = 2x^2 - 3$

เป็นสมการพาราโบลาเพราะสามารถอยู่ในรูป

$y = ax^2 + bx + c$ มี $a = \underline{\quad}$, $b = \underline{\quad}$, $c = \underline{\quad}$

ไม่เป็นสมการพาราโบลา

6) $y = -3(x+1)^2$

เป็นสมการพาราโบลาเพราะสามารถอยู่ในรูป

$y = ax^2 + bx + c$ มี $a = \underline{\quad}$, $b = \underline{\quad}$, $c = \underline{\quad}$

ไม่เป็นสมการพาราโบลา

7) $y^2 - (y-3)(x+3) = 0$

เป็นสมการพาราโบลาเพราะสามารถอยู่ในรูป

$y = ax^2 + bx + c$ มี $a = \underline{\quad}$, $b = \underline{\quad}$, $c = \underline{\quad}$

ไม่เป็นสมการพาราโบลา

8) $\frac{2}{3} - \frac{7}{x^2 - 2} = 0$

เป็นสมการพาราโบลาเพราะสามารถอยู่ในรูป

$y = ax^2 + bx + c$ มี $a = \underline{\quad}$, $b = \underline{\quad}$, $c = \underline{\quad}$

ไม่เป็นสมการพาราโบลา

หน้า 8-10
มีในเอกสารตัวเต็ม

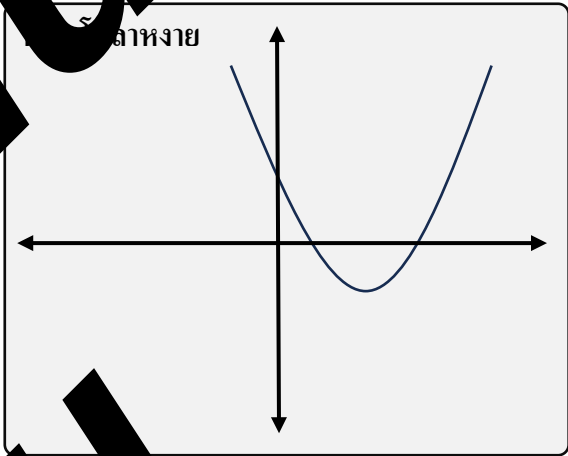
ลักษณะและส่วนประกอบของกราฟพาราโบลา

กราฟพาราโบลามีสำหรับ $a > 0$ และ $a < 0$ นี้ จะแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ คือ _____

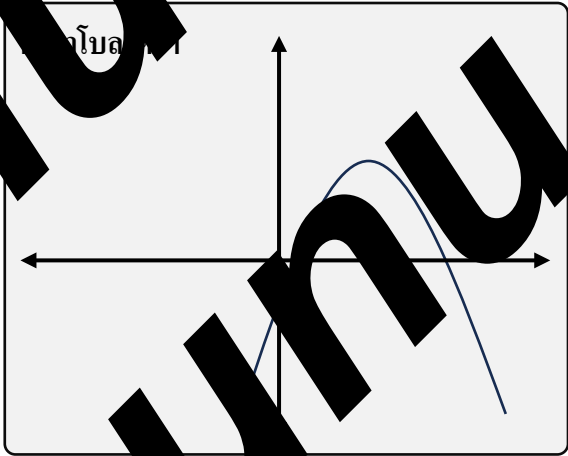
ส่วนประกอบของกราฟพาราโบลา

จุดยอด (vertex) ของกราฟพาราโบลา

- บางทีอาจเรียกว่า _____
- เขียนเป็นจุด (x,y) ที่เป็นจุดยอดของกราฟพาราโบลาว่า _____
 - จุดยอดของกราฟพาราโบลาลงทางซ้ายคือ _____
 - จุดยอดของกราฟพาราโบลาคว่านั้้นคือ _____



หากพิจารณาจากลักษณะของกราฟพาราโบลานั้น อาจจะมองได้ว่าจากจุดยอดนั้น เส้นกราฟ (อาจจะเรียกแกนของกราฟ) บานออกมาไปทั้งทางด้านซ้ายและทางด้านขวาเรื่อยๆ โดยที่เส้นกราฟจะสมมาตรกันและเส้นกราฟที่บานออกมานั้นจะไม่ตัดกัน โดยที่เส้นกราฟที่บานออกไปเรื่อยๆ นั้นอาจเกิดการเจ็บหัวลงตรงไปด้วยเพื่อแทนที่ไม่สิ้นสุดของกราฟ



จุดยอดสูงสุดหรือต่ำสุดของกราฟพาราโบลานั้น จะพิจารณาจากค่า y ของกราฟพาราโบลานั้น

จุดยอดของกราฟพาราโบลาลงทางซ้ายนั้นจะมีจุดยอด (h,k) เป็นจุด _____ แต่ไม่มีจุด _____

ค่าต่ำสุด คือ _____ แต่ค่าสูงสุด _____

จาก กราฟพาราโบลาคว่านั้้นจะมีจุดยอด (h,k) เป็นจุด _____ แต่ไม่มี _____

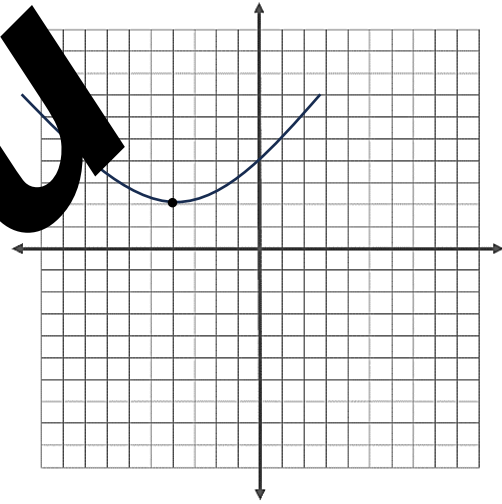
จะได้ว่า ; ค่าสูงสุด คือ _____ แต่ค่าต่ำสุด _____

2) **แกนสมมาตร (axis of symmetry)** เป็นเส้นตรงแนวตั้ง (ตั้งฉากกับแกน x) ที่ลากผ่านจุดยอด (h,k) ของกราฟพาราโบลา โดยที่เส้นแกนสมมาตรนั้นจะแบ่งกราฟออกเป็นสองส่วนที่เหมือนกันหรืออาจจะกล่าวได้ว่า “ หากพับกราฟพาราโบลาคว่านั้้นตามแนวแกนสมมาตรนั้น เส้นกราฟทั้งสองข้างทางด้านซ้ายและทางด้านขวานั้นจะทับกันได้สนิท ”

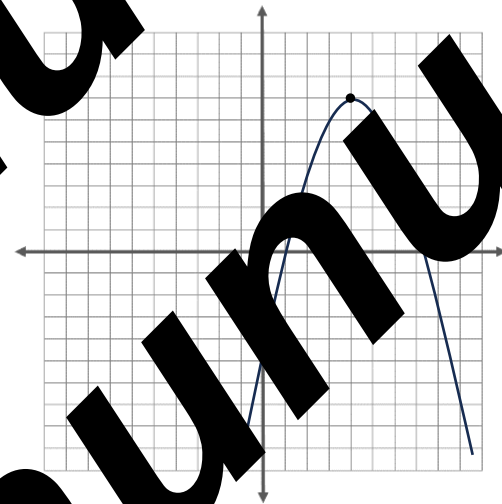
สมการเส้นตรงที่เป็นแกนสมมาตรคือ _____

ตัวอย่าง จงตอบคำถามกรณฑ์พาราโบลาที่กำหนดให้ต่อไปนี้

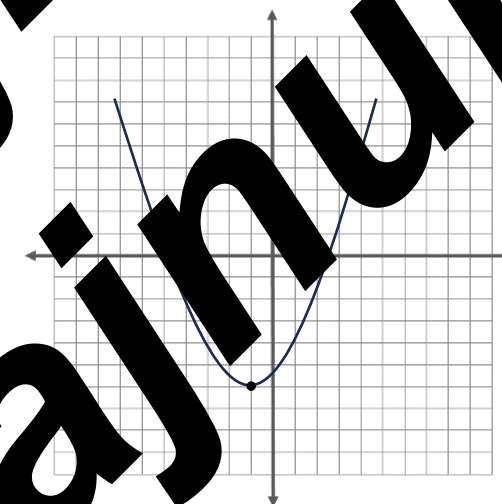
- 1) • กราฟนี้มีลักษณะเป็นกราฟพาราโบลา _____
- จุดยอดหรือจุดวกกลับ (h,k) คือ _____
- ซึ่งจะเป็นจุด _____ ของกราฟ โดยที่ _____
- กราฟพาราโบลานี้จะไม่มีจุด _____
- สมการแกนสมมาตร คือ _____
- ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดนั้น จะพิจารณาจากค่า y _____
- ที่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของกราฟพาราโบลา _____
- ดังนั้น ค่าสูงสุด คือ _____
- ค่าต่ำสุด คือ _____



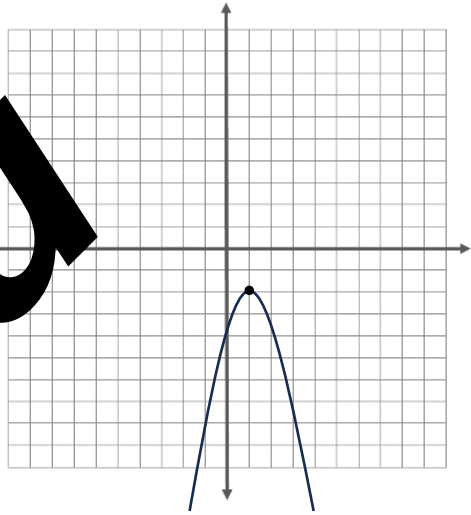
- 2) • กราฟนี้มีลักษณะเป็นกราฟพาราโบลา _____
- จุดยอดหรือจุดวกกลับ (h,k) คือ _____
- ซึ่งจะเป็นจุด _____ ของกราฟ โดยที่ _____
- กราฟพาราโบลานี้จะไม่มีจุด _____
- สมการแกนสมมาตร คือ _____
- ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดนั้น จะพิจารณาจากค่า y _____
- ที่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของกราฟพาราโบลา _____
- ดังนั้น ค่าสูงสุด คือ _____
- ค่าต่ำสุด คือ _____



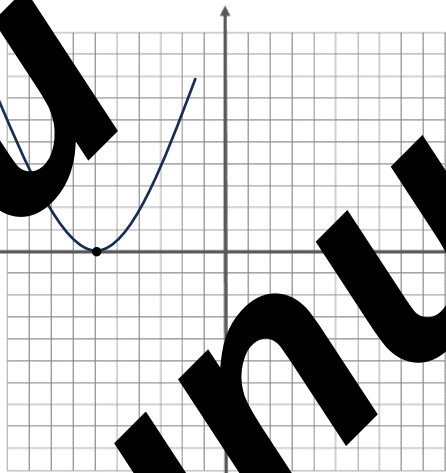
- 3) • กราฟนี้มีลักษณะเป็นกราฟพาราโบลา _____
- จุดยอดหรือจุดวกกลับ (h,k) คือ _____
- ซึ่งจะเป็นจุด _____ ของกราฟ โดยที่ _____
- กราฟพาราโบลานี้จะไม่มีจุด _____
- สมการแกนสมมาตร คือ _____
- ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดนั้น จะพิจารณาจากค่า y _____
- ที่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของกราฟพาราโบลา _____
- ดังนั้น ค่าสูงสุด คือ _____
- ค่าต่ำสุด คือ _____



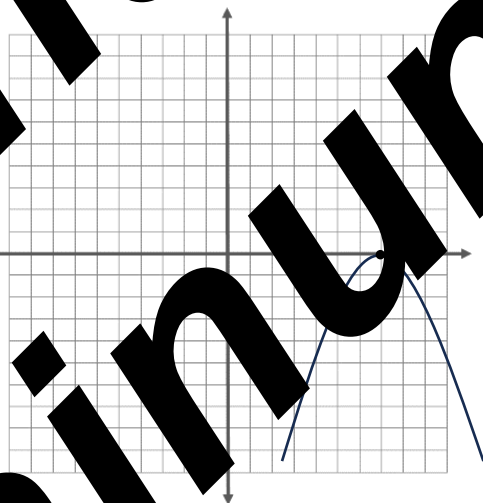
- 4) • กราฟนี้มีลักษณะเป็นกราฟพาราโบลา _____
- จุดยอดหรือจุดคว่ำ (h,k) คือ _____
ซึ่งจะเป็นจุด _____ ของกราฟ โดยที่
กราฟพาราโบลานี้จะไม่มีจุด _____
- สมการแกนสมมาตร คือ _____
- ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดนั้น จะพิจารณาจากค่า y
ที่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของกราฟพาราโบลา
ดังนั้น ค่าสูงสุด คือ _____
ค่าต่ำสุด คือ _____



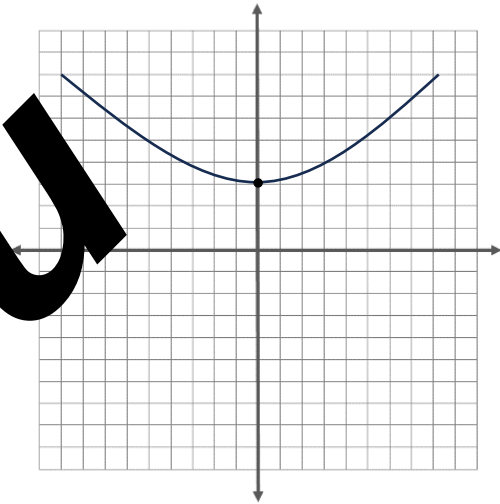
- 5) • กราฟนี้มีลักษณะเป็นกราฟพาราโบลา _____
- จุดยอดหรือจุดคว่ำ (h,k) คือ _____
ซึ่งจะเป็นจุด _____ ของกราฟ โดยที่
กราฟพาราโบลานี้จะไม่มีจุด _____
- สมการแกนสมมาตร คือ _____
- ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดนั้น จะพิจารณาจากค่า y
ที่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของกราฟพาราโบลา
ดังนั้น ค่าสูงสุด คือ _____
ค่าต่ำสุด คือ _____



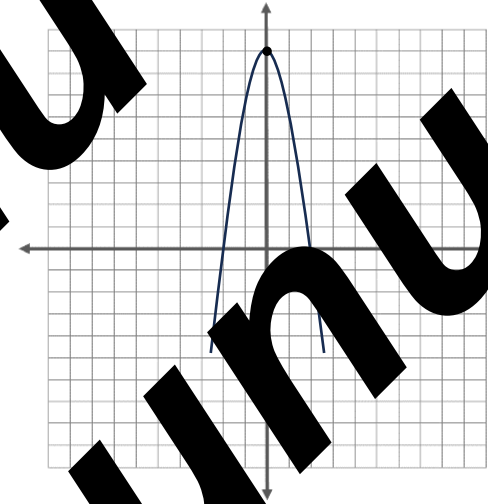
- 6) • กราฟนี้มีลักษณะเป็นกราฟพาราโบลา _____
- จุดยอดหรือจุดคว่ำ (h,k) คือ _____
ซึ่งจะเป็นจุด _____ ของกราฟ โดยที่
กราฟพาราโบลานี้จะไม่มีจุด _____
- สมการแกนสมมาตร คือ _____
- ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดนั้น จะพิจารณาจากค่า y
ที่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของกราฟพาราโบลา
ดังนั้น ค่าสูงสุด คือ _____
ค่าต่ำสุด คือ _____



- 7)
- กราฟนี้มีลักษณะเป็นกราฟพาราโบลา _____
 - จุดยอดหรือจุดวกกลับ (h,k) คือ _____
 จุดนี้เป็นจุด _____ ของกราฟ โดยที่
 กราฟพาราโบลานี้จะไม่มีจุด _____
 - สมการแกนสมมาตร คือ _____
 - ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดนั้น จะพิจารณาจากค่า
 ที่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของกราฟพาราโบลานี้
 ดังนั้น ค่าสูงสุด คือ _____
 ค่าต่ำสุด คือ _____



- 8)
- กราฟนี้มีลักษณะเป็นกราฟพาราโบลา _____
 - จุดยอดหรือจุดวกกลับ (h,k) คือ _____
 จุดนี้เป็นจุด _____ ของกราฟ โดยที่
 กราฟพาราโบลานี้จะไม่มีจุด _____
 - สมการแกนสมมาตร คือ _____
 - ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดนั้น จะพิจารณาจากค่า
 ที่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของกราฟพาราโบลานี้
 ดังนั้น ค่าสูงสุด คือ _____
 ค่าต่ำสุด คือ _____



หน้า 15-18
มีในเอกสารตัวเต็ม

รูปแบบของสมการกราฟพาราโบลา

รูปแบบของสมการกราฟพาราโบลามีหัวข้อนี้นแบ่งออกเป็น 2 รูปแบบ คือ Vertex Form และ Quadratic Form

สมการพาราโบลาในรูปแบบ Vertex Form

สมการพาราโบลาในรูปแบบ Vertex Form คือ $y = a(x - h)^2 + k$ โดยที่ a, h, k เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$

ค่า a, h, k ในสมการ vertex form นั้น จะมีผลต่อลักษณะและตำแหน่งจุดยอดของกราฟพาราโบลา ซึ่งในการศึกษาหัวข้อนี้นั้น เพื่อให้เห็นถึงผลของค่า a, h, k ในสมการ จึงจะขอแบ่งสมการพาราโบลาในรูปแบบ vertex form ออกเป็นกรณีต่างๆ ดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 สมการ $y = ax^2$ เมื่อ $h, k = 0$

จากสมการพาราโบลาที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$P_1: y = x^2$

x									
y									

$P_2: y = \frac{1}{2}x^2$

x									
y									

$P_3: y = x^2$

x									
y									

$P_4: y = -x^2$

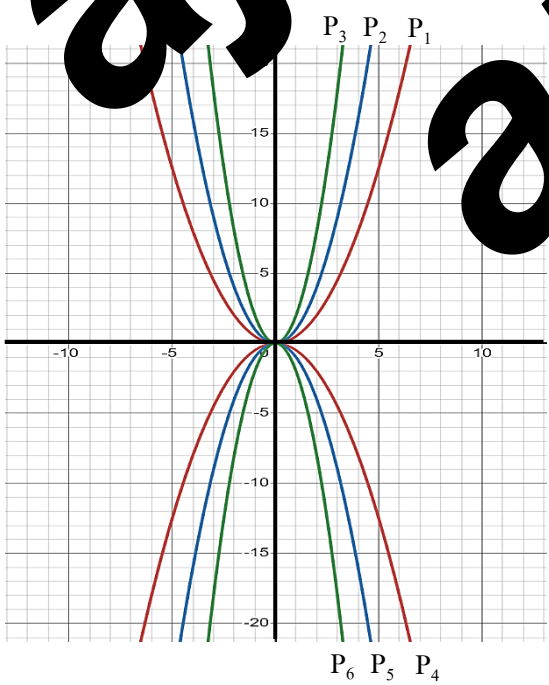
x									
y									

$P_5: y = 2x^2$

x									
y									

$P_6: y = -2x^2$

x									
y									



ข้อสังเกต

- P_6 มีค่า
- P_1, P_2, P_3 มีค่า มีผลทำให้เส้นกราฟ
- P_4, P_5 มีค่า มีผลทำให้เส้นกราฟ
- $|a|$ ยิ่ง กราฟพาราโบลา ยิ่ง
- $|a|$ ยิ่งมีค่า กราฟพาราโบลา ยิ่ง

กรณีที่ 2

$y = a(x-h)^2$ เมื่อ $k = 0$

จากสมการพาราโบลาที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$P_1: y = 2x^2 \rightarrow y = 2(x - \underline{\hspace{1cm}})^2 + \underline{\hspace{1cm}}$

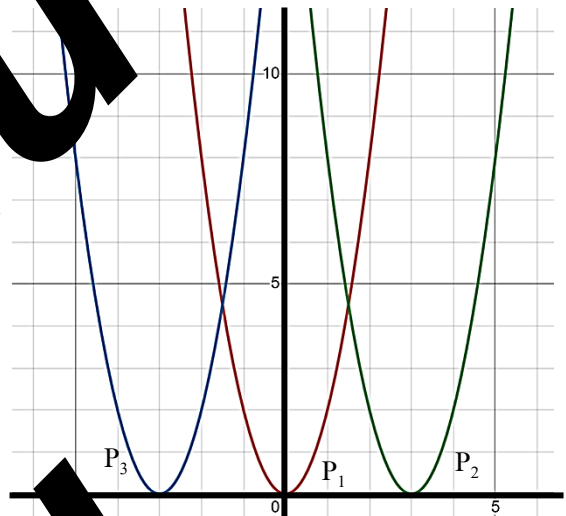
x									
y									

$P_2: y = 2(x-3)^2 \rightarrow y = 2(x - \underline{\hspace{1cm}})^2 + \underline{\hspace{1cm}}$

x									
y									

$P_3: y = 2(x+3)^2 \rightarrow y = 2(x - \underline{\hspace{1cm}})^2 + \underline{\hspace{1cm}}$

x									
y									

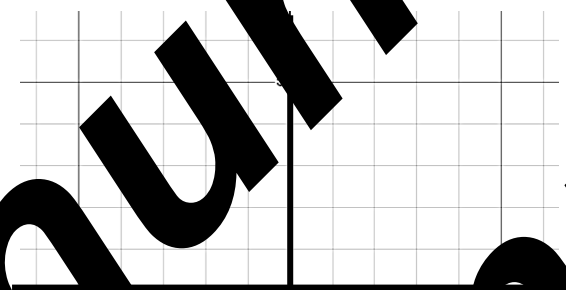


$P_4: y = -2x^2 \rightarrow y = -2(x - \underline{\hspace{1cm}})^2 + \underline{\hspace{1cm}}$

x									
y									

$P_5: y = -2(x-3)^2 \rightarrow y = -2(x - \underline{\hspace{1cm}})^2 + \underline{\hspace{1cm}}$

x									
y									



$P_6: y = -2(x+3)^2 \rightarrow y = -2(x - \underline{\hspace{1cm}})^2 + \underline{\hspace{1cm}}$

x									
y									



$P_1 - P_6$ มีค่า จุดยอดจะ
ส่วนค่า h นั้นมีผลต่อ

กรณีที่ 3

$y = a(x + k)^2 + k$ เมื่อ $h = 0$

จากสมการพาราโบลาที่กำหนดให้ต่อไปนี้

P₁: $y = 2x^2$ → $y = 2(x - \underline{\hspace{1cm}})^2 + \underline{\hspace{1cm}}$

x									
y									

P₂: $y = 2x^2 + 3$ → $y = 2(x - \underline{\hspace{1cm}})^2 + \underline{\hspace{1cm}}$

x									
y									

P₃: $y = 2x^2 - 3$ → $y = 2(x - \underline{\hspace{1cm}})^2 + \underline{\hspace{1cm}}$

x									
y									

P₄: $y = -2x^2$ → $y = -2(x - \underline{\hspace{1cm}})^2 + \underline{\hspace{1cm}}$

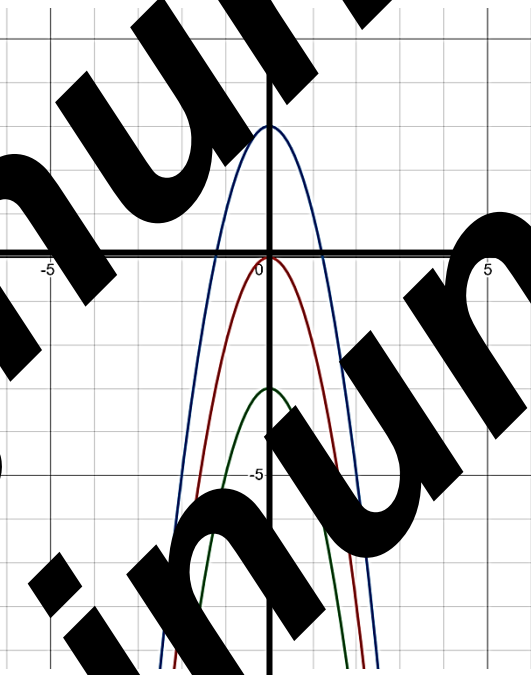
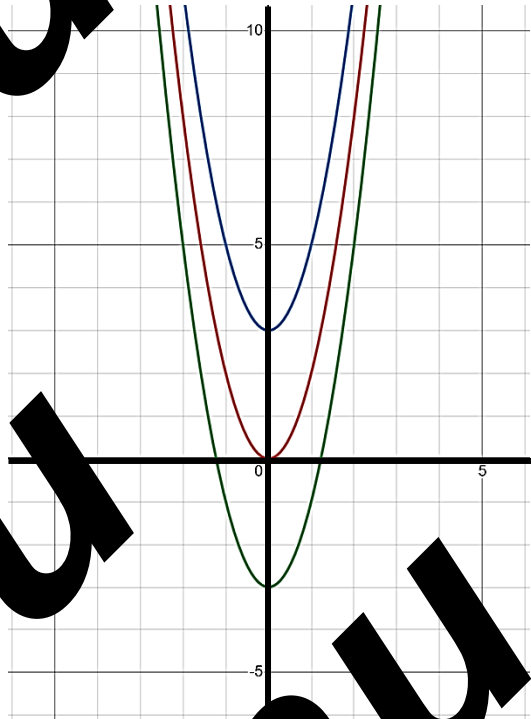
x									
y									

P₅: $y = -2x^2 + 3$ → $y = -2(x - \underline{\hspace{1cm}})^2 + \underline{\hspace{1cm}}$

x									
y									

P₆: $y = -2x^2 - 3$ → $y = -2(x - \underline{\hspace{1cm}})^2 + \underline{\hspace{1cm}}$

x									
y									



P₁-P₆ มีค่า จุดยอดจะ
 ส่วนค่า k นั้นมีผลต่อ

จากการศึกษาข้างต้น เราทราบว่า กราฟพาราโบลา **ขอสรุป** การพิจารณาค่า a, h, k ในสมการกราฟพาราโบลา vertex form พร้อมขั้นตอนวิธี เพื่อทำการวาดกราฟพาราโบลาอย่างคร่าวๆ ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1

พิจารณาลักษณะของกราฟพาราโบลาในกรณีการวางแปลนหางหรือคั่วว่า

โดยที่พิจารณาจากค่า a ดังนี้ ;

เมื่อ $a > 0$ จะเป็นพาราโบลา

เมื่อ $a < 0$ จะเป็นพาราโบลา

$$y = a(x - h)^2 + k$$

ขั้นตอนที่ 2

ค่า h พิจารณาจากจำนวนที่อยู่หลัง x ในวงเล็บง่ายๆว่า ;

เห็น ได้

เห็น ได้

ไม่เห็น ได้

ขั้นตอนที่ 3

ค่า k พิจารณาจากจำนวนที่อยู่หลัง $(x-h)^2$ ง่ายๆว่า ;

เห็น ได้

เห็น ได้

ไม่เห็น ได้

ขั้นตอนที่ 4

ค่า k ของพิกัด (h, k) ซึ่งจะเป็นจุดยอดของกราฟพาราโบลาอยู่บนแกนพิกัด จากนั้นวาดกราฟพาราโบลาที่มีลักษณะหางขึ้นหรือคั่วว่า ขึ้นจากพิจารณาค่า a ลงบนแกนพิกัด

หมายเหตุ

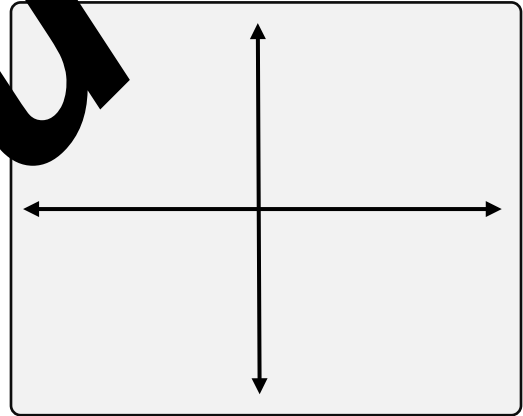
สำหรับการวาดกราฟพาราโบลาอย่างคร่าวๆนั้น เราต้องการเพียงทราบตำแหน่งของจุดยอด (h, k) และลักษณะของกราฟพาราโบลาว่าเป็นพาราโบลาขึ้นหรือคั่วเท่านั้น โดยอาจจะไม่จำเป็นต้องคำนึงถึงการบานของกราฟว่าจะบานกว้างหรือบานน้อย



ตัวอย่าง จากสมการของพาราโบลาที่กำหนดให้ จงตอบคำถามพร้อมวาดกราฟคร่าวๆ

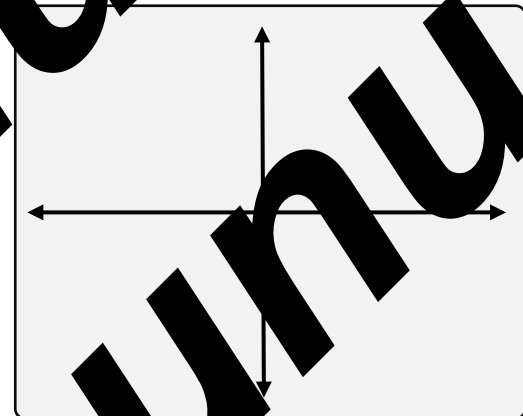
1) สมการ $y = x^2$

จากสมการรูป vertex form ของกราฟพาราโบลา
 ที่มี $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ซึ่ง $a \underline{\hspace{1cm}} 0$ ลักษณะของกราฟ
 พาราโบลานี้จะเป็นกราฟพาราโบลา $\underline{\hspace{1cm}}$
 จุดยอดหรือจุดวกกลับ (h,k) คือ $\underline{\hspace{1cm}}$
 ซึ่งจะเป็นจุด $\underline{\hspace{1cm}}$ ของกราฟ



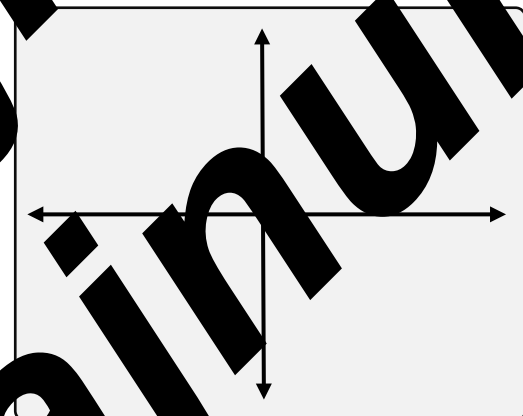
2) สมการ $y = (x-4)^2$

• จากสมการรูป vertex form ของกราฟพาราโบลา
 ที่มี $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ซึ่ง $a \underline{\hspace{1cm}} 0$ ลักษณะของกราฟ
 พาราโบลานี้จะเป็นกราฟพาราโบลา $\underline{\hspace{1cm}}$
 • จุดยอดหรือจุดวกกลับ (h,k) คือ $\underline{\hspace{1cm}}$
 ซึ่งจะเป็นจุด $\underline{\hspace{1cm}}$ ของกราฟ



3) สมการ $y = -\frac{1}{4}(x+3)^2 - 2$

• จากสมการรูป vertex form ของกราฟพาราโบลา
 ที่มี $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ซึ่ง $a \underline{\hspace{1cm}} 0$ ลักษณะของกราฟ
 พาราโบลานี้จะเป็นกราฟพาราโบลา $\underline{\hspace{1cm}}$
 • จุดยอดหรือจุดวกกลับ (h,k) คือ $\underline{\hspace{1cm}}$
 ซึ่งจะเป็นจุด $\underline{\hspace{1cm}}$ ของกราฟ

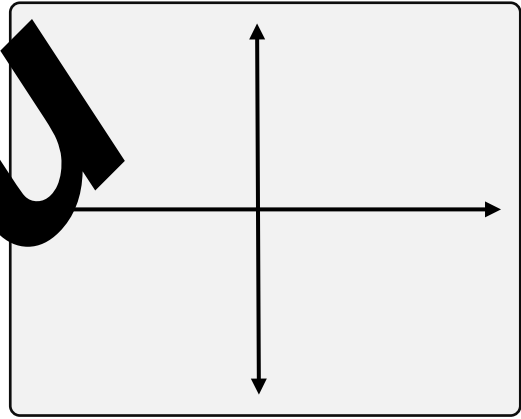


4) สมการ $y = \frac{2}{3}(x - \dots) + 7$

- จากสมการใน vertex form ของกราฟพาราโบลา

มี $a = \dots$ ซึ่ง $a \dots 0$ ลักษณะของกราฟพาราโบลา \dots นี้จะเป็นกราฟพาราโบลา \dots

จุดยอดหรือจุดวกกลับ (h,k) คือ \dots ซึ่งจะเป็จุด \dots ของกราฟ

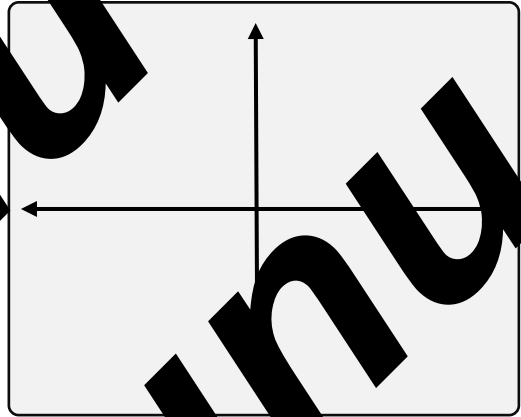


5) สมการ $y = 5(x^2 - 4)$

- จากสมการในรูป vertex form ของกราฟพาราโบลา

มี $a = \dots$ ซึ่ง $a \dots 0$ ลักษณะของกราฟพาราโบลา \dots นี้จะเป็นกราฟพาราโบลา \dots

จุดยอดหรือจุดวกกลับ (h,k) คือ \dots ซึ่งจะเป็จุด \dots ของกราฟ

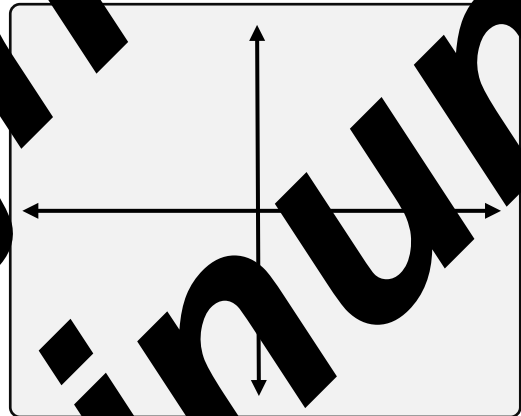


6) สมการ $y = \dots$

- จากสมการใน vertex form ของกราฟพาราโบลา

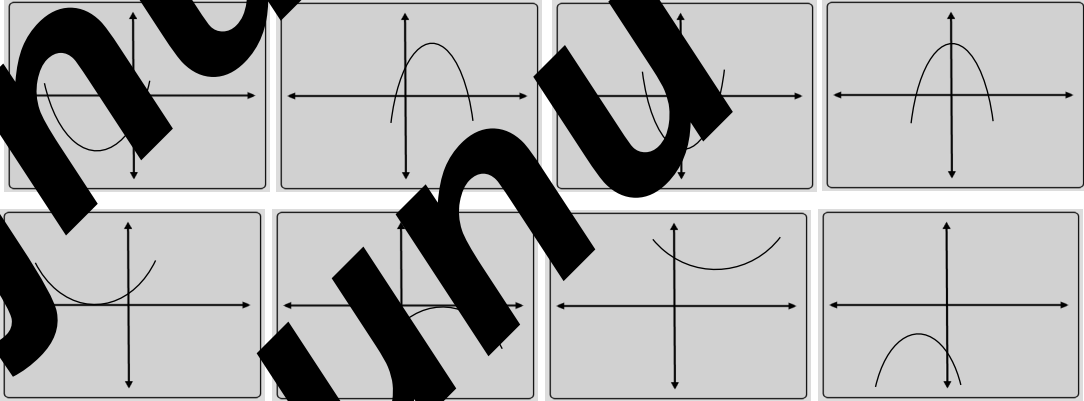
มี $a = \dots$ ซึ่ง $a \dots 0$ ลักษณะของกราฟพาราโบลา \dots นี้จะเป็นกราฟพาราโบลา \dots

จุดยอดหรือจุดวกกลับ (h,k) คือ \dots ซึ่งจะเป็จุด \dots ของกราฟ



การหาจุดตัดแกน x และแกน y จากสมการพาราโบลา vertex form

ก่อนอื่นขอให้นักเรียนพิจารณากราฟพาราโบลาที่กำหนดให้ต่อไปนี้



จะสังเกตเห็นได้ว่า :

- กราฟพาราโบลาที่ 1) กราฟพาราโบลาหงายนั้น _____
 ซึ่งจุดพิกัดที่กราฟพาราโบลาตัดแกน y นั้น จะมี _____
 และจะก้จุดตัดแกน x ของกราฟพาราโบลาเป็น 3 แบบ ดังนี้
 กราฟพาราโบลาตัดแกน x ได้ 2 จุด เมื่อ _____

 2) กราฟตัดแกน x เพียงค่า 1 จุด เมื่อ _____
 ซึ่งอาจใช้กรณีของสมการที่ลดแบบนี้ว่า “ _____ ”
 (ข้อ 1) และ 2) จุดพิกัดที่กราฟพาราโบลาตัดแกน x นั้น ทำ $y = 0$
 3) กราฟไม่ตัดแกน x เมื่อ _____

การหาจุดตัดแกน x

ให้แทนค่า $y = 0$ ลงในสมการกราฟพาราโบลา แล้วแก้สมการเพื่อหาค่า x ที่เป็นจุดตัดแกน x

- ถ้าค่า x จากการแก้สมการได้ 2 ค่า แสดงว่า _____
- ถ้าค่า x จากการแก้สมการได้ 1 ค่า แสดงว่า _____
- ถ้าค่า x จากการแก้สมการหาค่าไม่ได้ แสดงว่า _____

การหาจุดตัดแกน y

ให้แทนค่า $x = 0$ ลงในสมการกราฟพาราโบลา แล้วแก้สมการเพื่อหาค่า y ที่จะเป็นจุดตัดบนแกน y
 ซึ่งการแก้สมการนั้นจะได้ _____

จากที่ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับสมการพาราโบลา vertex form มาแล้วนั้น อยากให้ผู้เรียนดูตัวอย่าง
ดังต่อไปนี้ว่าสมการพาราโบนี่ๆนั้น เราควรตอบอะไรได้บ้าง

ตัวอย่าง สมการพาราโบลากำหนดให้ จงตอบคำถามพร้อมวาดกราฟคร่าวๆ

1) สมการ $y = (x - 4)^2$

จากสมการ vertex form ของกราฟพาราโบลานี้

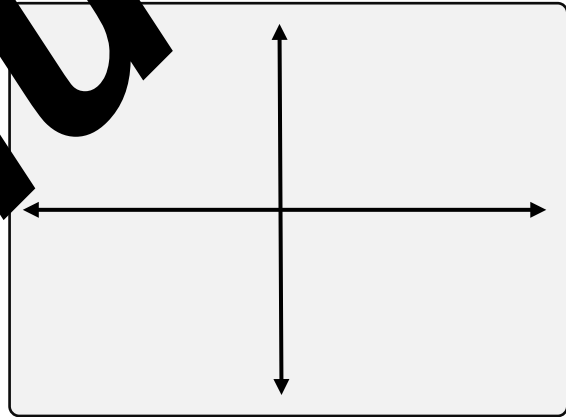
ค่า $a =$ _____ ซึ่ง a _____ 0 ลักษณะของกราฟ

พาราโบลานี้จะเป็นกราฟพาราโบลาคี่หรือคู่

จุดยอดหรือจุดวกกลับ (h,k) คือ _____

ซึ่งจะเป็นจุด _____ ของกราฟพาราโบลานี้

กราฟพาราโบลานี้จะตัดแกน _____



- กราฟพาดแกน x หรือไม่ มีกี่จุดตัดแกน x

วิธีที่ 1 พิจารณาจากลักษณะกราฟพาราโบลานี้มี
จุดตัดแกน x _____
จุดตัดแกน y _____
ดังนั้น กราฟพาราโบลานี้จะ _____

- กราฟตัดแกน y หรือไม่

กราฟพาราโบลารูปนี้มีจุดยอด (h,k) อยู่บนแกน y
ดังนั้น กราฟพาราโบลานี้จะ _____
หรืออาจจะหาจุดตัดแกน x _____ ได้จึงควรแทน
ค่า $x = 0$ ลงไปในสมการเพื่อหาค่า y ที่จะเป็น
จุดตัดบนแกน y ของกราฟ

วิธีที่ 2 ให้แทนค่า $y = 0$ ลงในสมการพาราโบลานี้
เพื่อหาค่า x ที่จะเป็นจุดตัดบนแกน x ของกราฟ

เมื่อแทน $y = 0$ แล้วหาค่า x _____ ได้

กราฟจะตัดแกน x
ที่จุด _____

กราฟจะไม่ตัดแกน x

จะได้ว่า กราฟพาราโบลานี้จะตัดแกน y ที่จุด _____

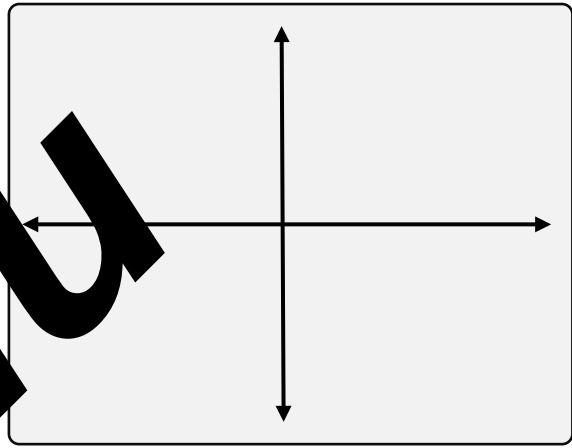
ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดนั้น จะพิจารณาจากค่า y
ที่มีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของกราฟพาราโบลานี้
ดังนั้น ค่าสูงสุด คือ _____
ค่าต่ำสุด คือ _____

- เส้นแกนสมมาตรเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดยอด (h,k)
ของกราฟพาราโบลและขนานกับแกน y
ซึ่งสมการแกนสมมาตรนั้น จะได้: $x = h$
ดังนั้น สมการแกนสมมาตร คือ _____

ดังนั้น ค่าสูงสุด คือ _____
ค่าต่ำสุด คือ _____

2) สมการ $y = (x + 5)^2 - 4$

- จากสมการ $y = a(x - h)^2 + k$ form ของกราฟพาราโบลา มี a ซึ่ง (h, k) ลักษณะของกราฟ พาราโบลาจะเป็นกราฟพาราโบลา _____ จุดยอดหรือจุดพลิกกลับ (h, k) คือ _____ ซึ่งจะอยู่ที่ _____ ของกราฟ พาราโบลาที่ไม่มีจุด _____



กราฟตัดแกน x หรือไม่ มีวิธีพิจารณาได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1 พิจารณาจากลักษณะกราฟพาราโบลานี้มีจุดยอดอยู่ _____ ดังนั้น กราฟพาราโบลานี้จะ _____

วิธีที่ 2 ให้แทนค่า $y = 0$ ลงในสมการพาราโบลา เพื่อหาค่า x ที่จะเจอจุดตัดบนแกน x ของกราฟ

- เมื่อแทน $y = 0$ แล้วหาค่า x _____ ได้
- กราฟจะตัดแกน x ที่จุด _____
 - กราฟจะไม่ตัดแกน x

- เส้นแกนสมมาตรเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดยอด (h, k) ของกราฟพาราโบลาและขนานกับแกน y ซึ่งสมการแกนสมมาตรนั้น จะได้; $x = h$

ดังนั้น สมการแกนสมมาตร คือ _____

- กราฟตัดแกน y หรือไม่

กราฟพาราโบลาว่าหรือหงายขึ้น แขนของกราฟพาราโบลาจะบานออกไปทางด้านซ้ายและทางด้านขวาได้เรื่อยๆ

ดังนั้น กราฟพาราโบลานี้จะ _____ แกน y จุดตัดแกน y นั้น หาได้จากการแทน $x = 0$ ลงในสมการเพื่อหาค่า y ที่จะเป็นจุดตัดกับแกน y ของกราฟ

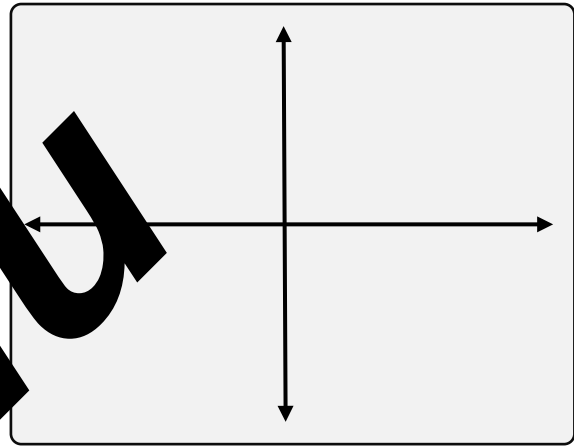
จะได้ว่า กราฟ _____ แกน y ที่ _____

- ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดนั้น จะพิจารณาจากค่า y ที่ _____ ค่าสูงสุดของกราฟพาราโบลา _____ ค่าสูงสุด คือ _____ ค่าต่ำสุด คือ _____

3) สมการ

$$y = -\frac{1}{3}(x-h)^2 + k$$

- จากสมการ $y = a(x-h)^2 + k$ form ของกราฟพาราโบลา มี a ซึ่ง $a > 0$ ลักษณะของกราฟพาราโบลาจะเป็นกราฟพาราโบลา _____ จุดยอดหรือจุดพลิกกลับ (h,k) คือ _____ ซึ่งจะอยู่ที่ _____ ของกราฟพาราโบลาที่ _____ กราฟพาราโบลานี้จะไม่มีจุด _____



กราฟตัดแกน x หรือไม่ มีวิธีพิจารณาได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1 พิจารณาจากลักษณะของพาราโบลานี้มีจุดยอดอยู่ _____ ดังนั้น กราฟพาราโบลานี้จะ _____

วิธีที่ 2 ให้แทนค่า $y=0$ ลงในสมการพาราโบลาเพื่อหาค่า x ที่จะเจอจุดตัดบนแกน x ของกราฟ

• กราฟตัดแกน y หรือไม่

กราฟพาราโบลาคว่าหรือหงายนั้น แขนของกราฟพาราโบลาจะบานออกไปทางด้านซ้ายและทางด้านขวาได้เรื่อยๆ

ดังนั้น กราฟพาราโบลานี้จะ _____ แกน y จุดตัดแกน y นั้น หาได้จากการแทน $x=0$ ลงในสมการเพื่อหาค่า y ที่จะเป็นจุดตัดแกน y ของกราฟ

เมื่อแทน $y=0$ แล้วหาค่า x _____ ได้

กราฟจะตัดแกน x ที่จุด _____

กราฟจะไม่ตัดแกน x

จะได้ว่า กราฟ _____ แกน y ที่ _____

- เส้นแกนสมมาตรเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดยอด (h,k) ของกราฟพาราโบลาและขนานกับแกน y ซึ่งสมการแกนสมมาตรนั้น จะได้; $x = h$

ดังนั้น สมการแกนสมมาตร คือ _____

- ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดนั้น จะพิจารณาจากค่า y ที่ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของกราฟพาราโบลา

ค่าสูงสุด คือ _____

ค่าต่ำสุด คือ _____

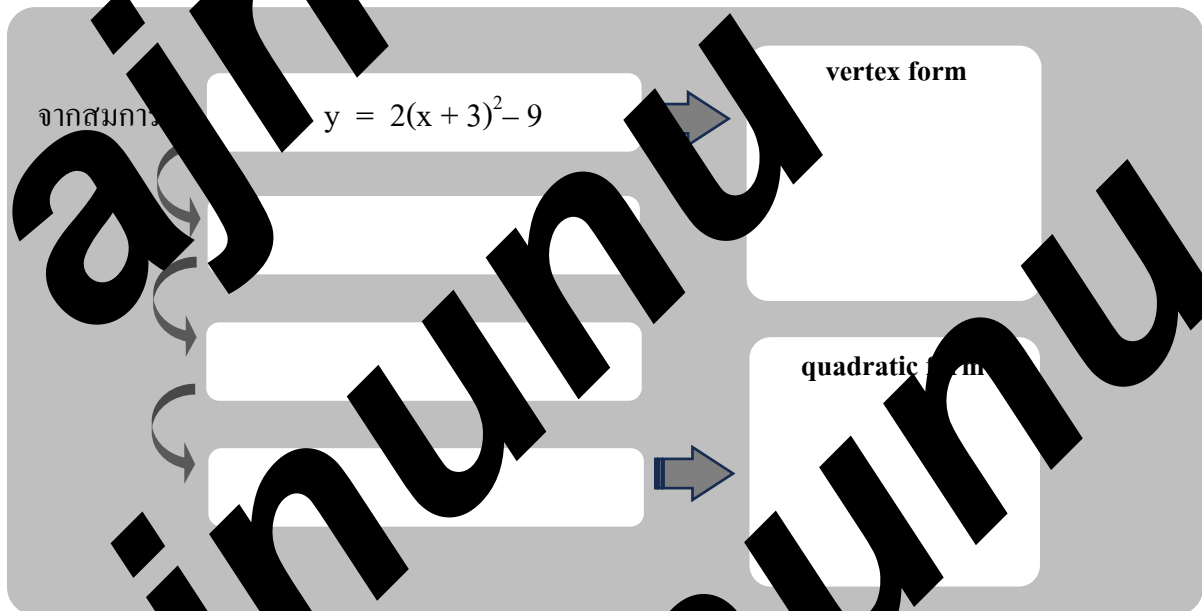
หน้า 29-54
มีในเอกสารตัวเต็ม

สมการพาราโบลารูป Quadratic Form

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{โดยที่ } a, b, c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

$$a \neq 0$$

ที่ได้ทำการศึกษารูปแบบของสมการพาราโบลารูป vertex form มาแล้วนั้น ต่อจากนี้จะเป็นการศึกษา รูปแบบของสมการพาราโบลารูป quadratic form ทั้งสองรูปแบบนี้จะมีความเชื่อมโยงและเกี่ยวข้องกันอยู่ ซึ่งอยากให้ผู้เรียนได้พิจารณาถึงความเชื่อมโยงและเกี่ยวข้องกันของสมการพาราโบลารูปทั้ง 2 รูปแบบ ดังตัวอย่างที่จะแสดงต่อไปนี้



จะเห็นว่าค่า (h, k) ที่ใช้ในการบอกลักษณะกราฟพาราโบลารูปเป็นพาราโบลากว้างหรือค้ำของสมการพาราโบลารูป vertex form ค่า a ของสมการรูป quadratic form นั้นมีค่าเดียวกัน **ดังนั้น** เราจึงสามารถหาค่า a จากสมการรูป $y = ax^2 + bx + c$ (quadratic form) ในการพิจารณาลักษณะของพาราโบลานั้นได้หากหา (h, k) ออกมาได้

แต่ทว่า!!! ค่า (h, k) เป็นจุดยอดของกราฟพาราโบลานั้น

เราไม่สามารถพิจารณาจากสมการรูป $y = ax^2 + bx + c$ (quadratic form) ในการหา (h, k) ที่เหมือนกับ การพิจารณาจากสมการรูป $y = a(x - h)^2 + k$ (vertex form)

ดังนั้น เราจึงต้องมาทำการศึกษาเกี่ยวกับวิธีการหา (h, k) ซึ่งจะหาค่าจุดยอดของกราฟพาราโบลามาจากสมการรูป $y = ax^2 + bx + c$ (quadratic form) ซึ่งแบ่งวิธีการหา (h, k) ออกมาดังนี้

วิธีที่ 1 ใช้หลักการของกำลังสองสมบูรณ์มาจัดรูปสมการให้เป็น vertex form

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้เป็นการใช้หลักการของพหุนามกำลังสองสมบูรณ์นำมาจัดรูปสมการพาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$ (quadratic form) ให้เป็นรูปสมการพาราโบลา $y = a(x-h)^2 + k$ (vertex form)

ตัวอย่างที่ 1 จงจัดรูปสมการพาราโบลา $y = x^2 - 6x + 5$ ให้อยู่ในสมการพาราโบลารูป $y = a(x-h)^2 + k$

$y = x^2 - 6x + 5$

↓

↓

↓

↓

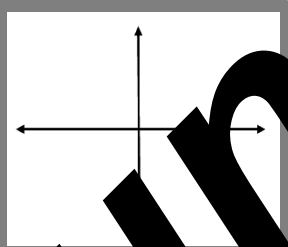
↓

↓

↓

↓

ค่า $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ซึ่ง $a \underline{\hspace{1cm}} 0$
 จะเป็นพาราโบลา $\underline{\hspace{2cm}}$
 จุดยอด $(h,k) = \underline{\hspace{2cm}}$



วิธีการจัดรูป

1) จากสมการรูป quadratic form พิจารณาพจน์ $ax^2 + bx$ (โดยที่ $a = 1$) แล้วทำให้เป็นพหุนามกำลังสองสมบูรณ์ดังนี้

$(\text{หน้า})^2 \pm 2(\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2$

2) เปลี่ยนกำลังสองสมบูรณ์ให้อยู่ในรูปวงเล็บที่แยกกำลังสองตามรูปแบบความสัมพันธ์ดังนี้

$(\text{หน้า} \pm \text{หลัง})^2 = (\text{หน้า})^2 \pm 2(\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2$

3) จัดสมการให้อยู่ในรูป vertex form

$y = a(x-h)^2 + k$

ตัวอย่างที่ 2 จงจัดรูปสมการพาราโบลา $y = -5x^2 - 12x - 8$ ให้อยู่ในสมการพาราโบลารูป $y = a(x-h)^2 + k$

จาก $y = -5x^2 - 12x - 8$

↓

↓

↓

↓

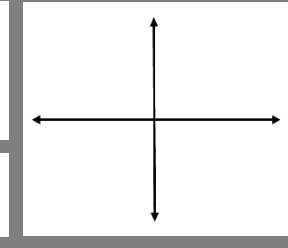
↓

↓

↓

↓

ค่า $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ซึ่ง $a \underline{\hspace{1cm}} 0$
 จะเป็นพาราโบลา $\underline{\hspace{2cm}}$
 จุดยอด $(h,k) = \underline{\hspace{2cm}}$



วิธีการจัดรูป

1) จากสมการรูป quadratic form พิจารณาพจน์ $ax^2 + bx$ (โดยที่ $a = 1$) แล้วทำให้เป็นพหุนามกำลังสองสมบูรณ์ดังนี้

$(\text{หน้า})^2 \pm 2(\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2$

2) เปลี่ยนกำลังสองสมบูรณ์ให้อยู่ในรูปวงเล็บที่แยกกำลังสองตามรูปแบบความสัมพันธ์ดังนี้

$(\text{หน้า} \pm \text{หลัง})^2 = (\text{หน้า})^2 \pm 2(\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2$

3) จัดสมการให้อยู่ในรูป vertex form

$y = a(x-h)^2 + k$

ตัวอย่างที่ 3 จงจัดรูปสมการพาราโบลา $y = \frac{2}{3}x^2 + 4x + 8$ ให้อยู่ในสมการพาราโบลารูป $y = a(x-h)^2 + k$

จาก $y = \frac{2}{3}x^2 + 4x + 8$

$y = \frac{2}{3}(x^2 + 6x) + 8$

$y = \frac{2}{3}(x^2 + 6x + 9) + 8 - \frac{2}{3}(9)$

$y = \frac{2}{3}(x+3)^2 + 8 - 2$

$y = \frac{2}{3}(x+3)^2 + 6$

$y = \frac{2}{3}(x-h)^2 + k$

ค่า $a = \frac{2}{3}$ ซึ่ง $a > 0$
 จะเป็นพาราโบลา \uparrow
 จุดยอด $(h,k) = (-3, 6)$

วิธีการจัดรูป

- 1) จัดสมการรูป quadratic form พิจารณาพจน์ $ax^2 + bx$ (โดยที่ $a \neq 1$) แล้วทำให้เป็นพหุนามกำลังสองสมบูรณ์ตามนี้

$$(\text{หน้า})^2 \pm 2(\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2$$

- 2) เปลี่ยนกำลังสองสมบูรณ์ให้อยู่ในรูปวงเล็บที่ ยกกำลังสองตามรูปแบบความสัมพันธ์ดังนี้

$$(\text{หน้า} \pm \text{หลัง})^2 = (\text{หน้า})^2 \pm 2(\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2$$

- 3) จัดสมการให้อยู่ในรูป vertex form

$$y = a(x-h)^2 + k$$

ตัวอย่างที่ 4 จงจัดรูปสมการพาราโบลา $y = -4x^2 - 8x$ ให้อยู่ในสมการพาราโบลารูป $y = a(x-h)^2 + k$

จาก $y = -4x^2 - 8x$

$y = -4(x^2 + 2x)$

$y = -4(x^2 + 2x + 1) + 4$

$y = -4(x+1)^2 + 4$

$y = a(x-h)^2 + k$

ค่า $a = -4$ ซึ่ง $a < 0$
 จะเป็นพาราโบลา \downarrow
 จุดยอด $(h,k) = (-1, 4)$

วิธีการจัดรูป

- 1) จัดสมการรูป quadratic form พิจารณาพจน์ $ax^2 + bx$ (โดยที่ $a \neq 1$) แล้วทำให้เป็นพหุนามกำลังสองสมบูรณ์ตามนี้

$$(\text{หน้า})^2 \pm 2(\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2$$

- 2) เปลี่ยนกำลังสองสมบูรณ์ให้อยู่ในรูปวงเล็บที่ ยกกำลังสองตามรูปแบบความสัมพันธ์ดังนี้

$$(\text{หน้า} \pm \text{หลัง})^2 = (\text{หน้า})^2 \pm 2(\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2$$

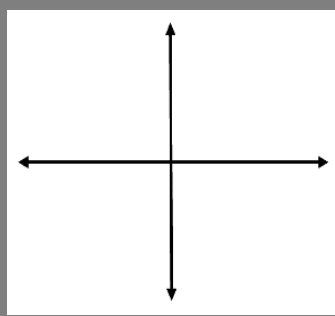
- 3) จัดสมการให้อยู่ในรูป vertex form

$$y = a(x-h)^2 + k$$

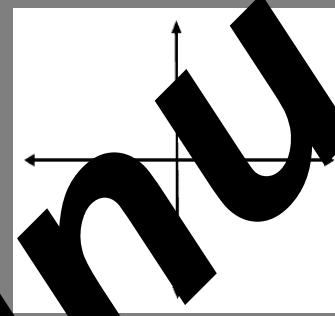
แบบฝึกหัดที่ 3.2

จงจัดสมการที่กำหนดต่อไปนี้ให้อยู่ในสมการพาราโบลารูป $y = a(x-h)^2 + k$

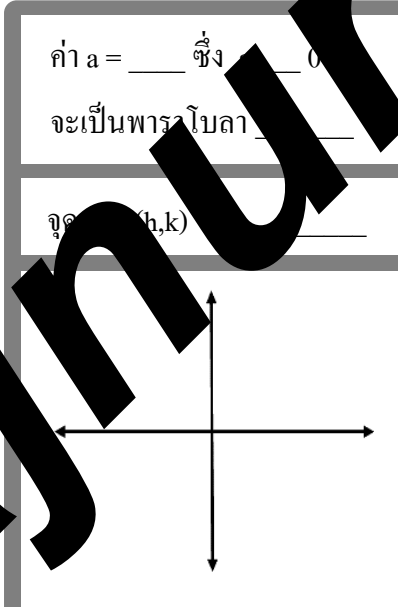
1) $y = x^2 - 10x + 25$

ค่า $a =$ _____ ซึ่ง a _____ 0	
จะเป็นพาราโบลา _____	
จุดยอด $(h,k) =$ _____	

2) $y = x^2 - 6x + 9$

ค่า $a =$ _____ ซึ่ง a _____ 0	
จะเป็นพาราโบลา _____	
จุดยอด $(h,k) =$ _____	

3) $y = x^2 + 2x + 21$

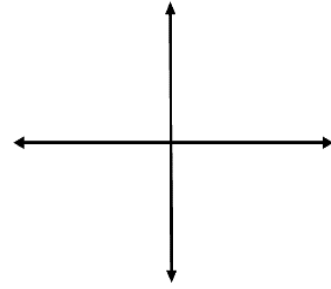
ค่า $a =$ _____ ซึ่ง _____ 0	
จะเป็นพาราโบลา _____	
จุดยอด $(h,k) =$ _____	

4) $y = -3x^2 + 3x - 73$

ค่า $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ซึ่ง $a \underline{\hspace{1cm}} 0$

จะเป็นพาราโบลา $\underline{\hspace{1cm}}$

จุดยอด $(h,k) = \underline{\hspace{1cm}}$

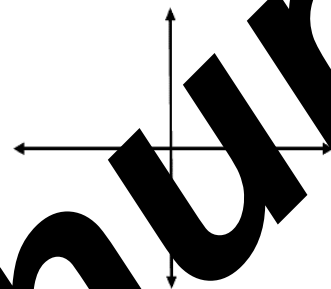


5) $y = \frac{x^2}{4} - 2x + 1$

ค่า $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ซึ่ง $a \underline{\hspace{1cm}} 0$

จะเป็นพาราโบลา $\underline{\hspace{1cm}}$

จุดยอด $(h,k) = \underline{\hspace{1cm}}$

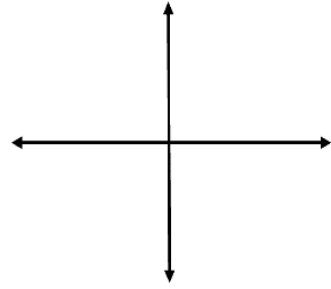


6) $0 = -2x^2 + 4x - 3$ 78

ค่า $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ซึ่ง $a \underline{\hspace{1cm}} 0$

จะเป็นพาราโบลา $\underline{\hspace{1cm}}$

จุดยอด $(h,k) = \underline{\hspace{1cm}}$

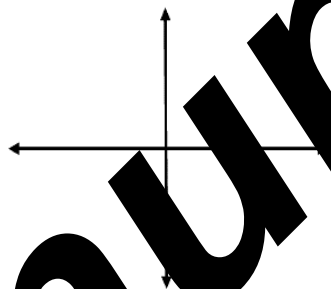


7) $y = 2x^2 + 8x$

ค่า $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ซึ่ง $a \underline{\hspace{1cm}} 0$

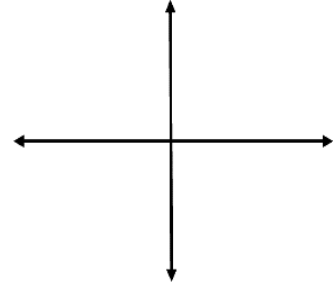
จะเป็นพาราโบลา $\underline{\hspace{1cm}}$

จุดยอด $(h,k) = \underline{\hspace{1cm}}$



8)

$$0 = -\frac{3x^2}{2} + 2x - 1$$

ค่า $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ซึ่ง $a \underline{\hspace{1cm}} 0$ จะเป็นพาราโบลา $\underline{\hspace{1cm}}$ จุดยอด $(h,k) = \underline{\hspace{1cm}}$ 

วิธีที่ 2 ใช้สูตรในการหาค่า h และ k

จากที่ได้ทำในศึกษาข้อที่ 1 มาก่อนหน้านี้เกี่ยวกับวิธีจัดรูปสมการพาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$ (quadratic form) ให้เป็นรูปสมการพาราโบลา $y = a(x - h)^2 + k$ (vertex form) โดยใช้หลักการของกำลังสองสมบูรณ์ช่วยในการจัดรูปนั้น นักเรียนจะพบว่ามีความยากและค่อนข้างเสียเวลาในการจัดรูปสมการ

ดังนั้น วิธีที่จะทำการศึกษาค้นคว้าต่อไปจะเป็นการสร้างสูตรเพื่อใช้ในการหาค่า h และ k จากรูปสมการพาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$ (quadratic form) เพื่อความสะดวกและรวดเร็วในการหาค่า h และ k โดยสูตรการหาค่า h และ k จากรูปสมการพาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$ (quadratic form) นั้นก็มีที่มาของสูตรที่มาจากการใช้หลักการกำลังสองสมบูรณ์นำมาช่วยในการจัดรูปให้เป็นกลายรูปสมการพาราโบลา $y = a(x - h)^2 + k$ (vertex form) ดังนี้

จากสมการ $y = ax^2 + bx + c$ Quadratic Form

จะได้ $y = a(x - h)^2 + k$ Vertex Form

เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบกับสมการพาราโบลาในรูป Vertex Form

จะได้ว่า;



ตัวอย่างที่ 1 จากสมการพาราโบลา $y = x^2 - 8x + 15$ จงตอบคำถามพร้อมวาดกราฟคร่าวๆ

- จากสมการ $y = x^2 + bx + c$

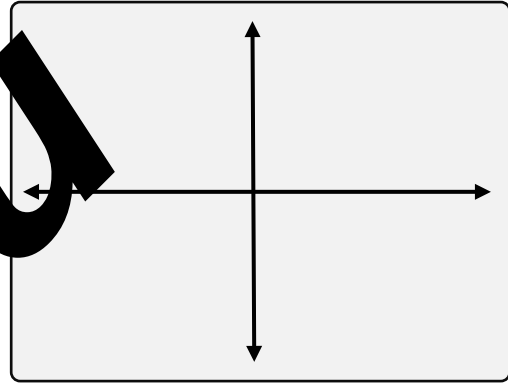
จะได้ว่า $a = \underline{\hspace{2cm}}$

$b = \underline{\hspace{2cm}}$

$c = \underline{\hspace{2cm}}$

จาก $a \underline{\hspace{1cm}} 0$ จะเป็นกราฟพาราโบลา $\underline{\hspace{1cm}}$

- จุดยอดหรือจุดวกกลับ (h,k) คือ $\underline{\hspace{2cm}}$



จากตัวอย่างที่ 1 นั้นจะสังเกตเห็นได้ว่า ในที่นี้ค่า k ของสมการพาราโบลารูป quadratic form นั้น โดยที่ k นั้นค่อนข้างมีความยุ่งยากในการหาค่าเพิ่มขึ้นมา อีกทั้งนักเรียนอาจจะจำสูตรในการหาค่า k จากสมการพาราโบลารูป quadratic form ไม่ได้

ดังนั้น เราอาจสูตรในการหาค่า k เพียงค่าเดียว จากนั้นในการหาค่า h นั้น เราสามารถนำค่า h ซึ่งก็คือค่า x แทนลงไปแทนที่ในสูตร $y = \dots$ ซึ่งก็จะเป็นค่า k นั้นเอง

ตัวอย่างที่ 2 จากสมการพาราโบลา $y = -3x^2 + 6x - 5$ จงตอบคำถามพร้อมวาดกราฟคร่าวๆ

- จากสมการ $y = x^2 + bx + c$

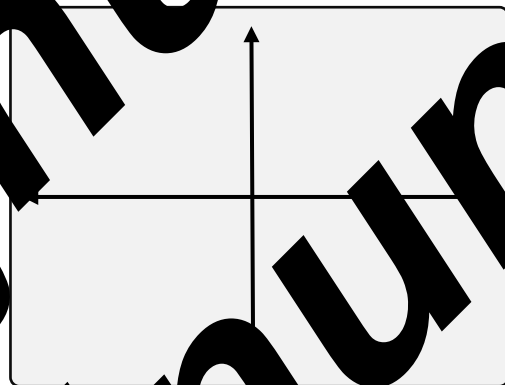
จะได้ว่า $a = \underline{\hspace{2cm}}$

$b = \underline{\hspace{2cm}}$

$c = \underline{\hspace{2cm}}$

- จาก $a \underline{\hspace{1cm}} 0$ จะเป็นกราฟพาราโบลารูป $\underline{\hspace{1cm}}$

- จุดยอดหรือจุดวกกลับ (h,k) คือ $\underline{\hspace{2cm}}$



หมายเหตุ

1. รูปสมการพหุนามโบลกที่มีพจน์ x นั้น สามารถพิจารณาและจัดให้อยู่ในรูปสมการ vertex form หรือ quadratic form ก็ได้ แต่ในกรณีนี้ควรพิจารณาให้อยู่ในรูปสมการ vertex form เนื่องจากเราสามารถประมาณองค์ประกอบของกราฟพาราโบลาได้ง่ายกว่า

เช่น จากสมการพหุนามโบลก $y = 3x^2 - 5$

กรณีจัดให้อยู่ในรูป quadratic form	กรณีจัดให้อยู่ในรูป vertex form
จะเห็นได้ว่า	

2. สมการพาราโบลาบางสมการ (ยกเว้นสมการที่อยู่ในรูปของ vertex form) ในครั้งแรกที่พบนั้น อาจจะไม่อยู่ในรูปของ quadratic form ซึ่งเราต้องจัดให้อยู่ใน quadratic form เสียก่อนจึงจะสามารถใช้สูตรในการหาจุดยอด (h,k) ได้

ตัวอย่างเช่น สมการที่กำหนดให้ จงจัดให้อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ พร้อมบอกค่าของ a, b, c

1) $y = 2x - 4 - x^2$

จัดให้อยู่ในรูป quadratic form

ได้ว่า;

โดยมีค่า $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$, $c = \underline{\hspace{2cm}}$

2) $y = 3x - 2 - 10 - 6x^2$

จัดให้อยู่ในรูป quadratic form

ได้ว่า;

โดยมีค่า $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$, $c = \underline{\hspace{2cm}}$

3) $y = (x + 1)(x + 5)$

จัดให้อยู่ในรูป quadratic form

ได้ว่า;

โดยมีค่า $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$, $c = \underline{\hspace{2cm}}$

4) $y = 2x(3 - 5x)$

จัดให้อยู่ในรูป quadratic form

ได้ว่า;

โดยที่ $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$, $c = \underline{\hspace{1cm}}$

5) $4y = (1 - 3x)(x - 2)$

จัดให้อยู่ในรูป quadratic form

ได้ว่า;

โดยที่ $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$, $c = \underline{\hspace{1cm}}$

6) $12y = -(3x - 2)^2$

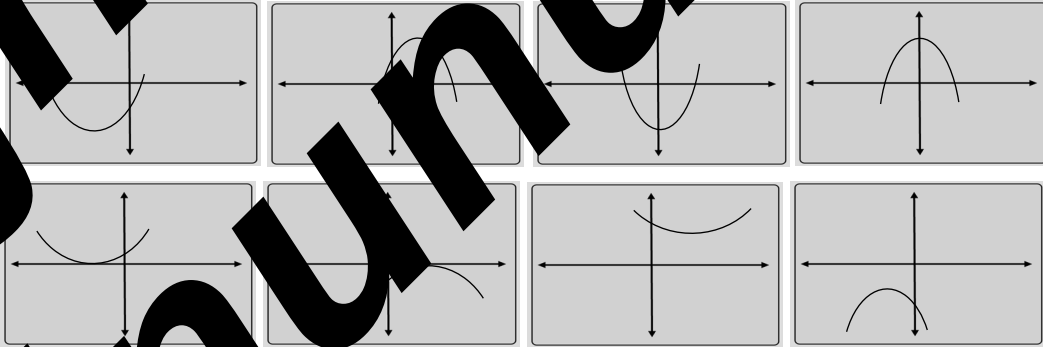
จัดให้อยู่ในรูป quadratic form

ได้ว่า;

โดยที่ $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$, $c = \underline{\hspace{1cm}}$ 

การหาจุดตัดแกน x และแกน y จากสมการพาราโบลารูป quadratic form

การพิจารณาสมการพาราโบลา $ax^2 + bx + c = 0$ นั้นๆ ตัดแกน x หรือแกน y หรือไม่นั้น มีหลักการเดียวกันกับการพิจารณาสมการพาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$ โดยพิจารณาจากตำแหน่งของจุดยอดและลักษณะของกราฟพาราโบลานั้นๆ



• กราฟพาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$ ค่าหรือกราฟพาราโบลานั้นๆ _____
 ซึ่งจุดตัดแกน y ที่กราฟพาราโบลาตัดแกน y นั้นๆ จะมีค่า _____

• ลักษณะการตัดแกน x ของกราฟพาราโบลา มี 3 แบบ คือ

- 1) กราฟตัดแกน x ได้ 2 จุด เมื่อ _____

- 2) กราฟตัดแกน x เพียง 1 จุด เมื่อ _____

 ซึ่งข้อนี้เรียกว่าสมการตัดแบบนี้มีว่า “ _____ ”

ข้อ 1) และ 2) จุดพิกัดที่กราฟพาราโบลาตัดแกน x นั้นๆ จะมีค่า _____

• กราฟพาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$ ตัดแกน x เมื่อ _____

การหาจุดตัดแกน x

ให้แทนค่า $y = 0$ ลงในสมการกราฟพาราโบลา แล้วแก้สมการเพื่อหาค่า x ที่จะเป็นจุดตัดบนแกน x

- ถ้าค่า x จากการแก้สมการได้ 2 ค่า แสดงว่า _____
- ถ้าค่า x จากการแก้สมการได้ 1 ค่า แสดงว่า _____
- ถ้าค่า x จากการแก้สมการหาค่าไม่ได้ แสดงว่า _____

การหาจุดตัดแกน y

ให้แทนค่า $x = 0$ ลงในสมการกราฟพาราโบลา แล้วแก้สมการเพื่อหาค่า y ที่จะเป็นจุดตัดบนแกน y

ซึ่งการแก้สมการนั้นจะได้ _____

แต่ทว่าในการหาค่าจุดตัดแกน x และแกน y ของกราฟพาราโบลาในกรณีที่สมการพาราโบลานั้น เป็นสมการรูป quadratic form นั้น ยังจุดที่น่าสนใจที่อยากให้ผู้เรียนทำการศึกษาอีก ดังต่อไปนี้

สมการพาราโบลารูป $y = ax^2 + bx + c$ โดยที่ a, b, c เป็นค่าคงตัว $a \neq 0$

ถ้าต้องการหาจุดตัดแกน x

จากการแทนค่า $y = 0$ ลงไปในสมการ quadratic form นั้น

จะได้ ;

$ax^2 + bx + c = 0$

ซึ่งในการแก้สมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ เพื่อหาค่า x นั้น เราสามารถใช้สูตร

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ดังนั้น

ถ้า $b^2 - 4ac > 0$

ถ้า $b^2 - 4ac = 0$

ถ้า $b^2 - 4ac < 0$

แล้ว x มี 2 ค่า

แล้ว x มี 1 ค่า

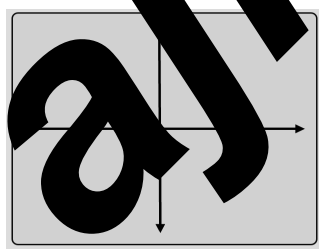
แล้ว x ไม่มีค่า

ซึ่งหมายความว่า ;

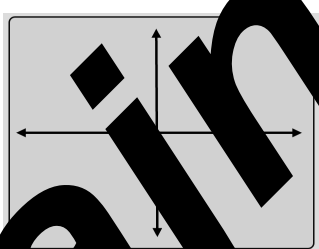
ซึ่งหมายความว่า ;

ซึ่งหมายความว่า ;

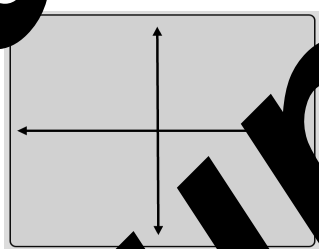
เช่น



เช่น



เช่น



ถ้าต้องการหาจุดตัดแกน y

จากการแทนค่า $x = 0$ ลงไปในสมการ quadratic form $y = ax^2 + bx + c$ นั้น

จะได้ ;

$y = c$

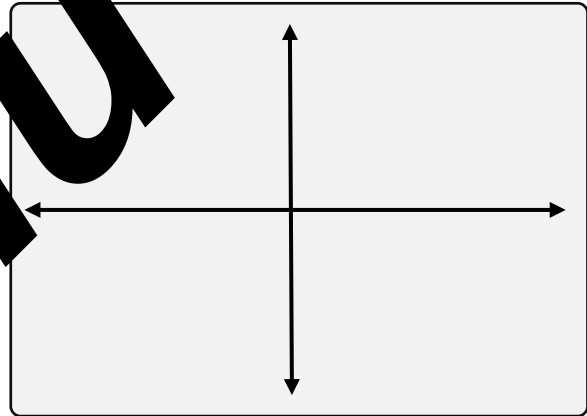
ดังนั้น

สมการพาราโบลารูป $y = ax^2 + bx + c$ นั้น มีจุดตัดแกน y คือ $y = c$

จากที่ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับสมการพาราโบลา quadratic form มาแล้วนั้น อยากให้ผู้เรียนดูตัวอย่าง
ดังต่อไปนี้ว่าสมการพาราโบลา quadratic form หนึ่งๆนั้น เราควรตอบอะไรได้บ้าง

ตัวอย่างที่ 1 $y = x^2 - 4x + 10$

- สมการพาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$
 มีค่า $a = \underline{\hspace{2cm}}$; $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$, $c = \underline{\hspace{2cm}}$
- จาก $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 0 จะเป็นกราฟพาราโบลา $\underline{\hspace{2cm}}$
- จุดยอดหรือจุดวกกลับ (h,k) คือ $\underline{\hspace{2cm}}$
 ซึ่ง $\underline{\hspace{2cm}}$ เป็นจุด $\underline{\hspace{2cm}}$ ของกราฟพาราโบลา
 พาราโบลานี้จะไม่มีจุด $\underline{\hspace{2cm}}$



กราฟพาราโบลาตัดแกน y หรือไม่ มีวิธีพิจารณาได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1 หาหาค่า y ที่ลักษณะกราฟพาราโบลานี้มี
 จุดยอดอยู่ที่ $\underline{\hspace{2cm}}$ แกน x
 ดังนั้น กราฟพาราโบลานี้จะ $\underline{\hspace{2cm}}$

วิธีที่ 2 ให้แทนค่า $y = \underline{\hspace{2cm}}$ ในสมการพาราโบลา
 เพื่อหาค่า x ที่จะเป็นจุดตัดบนแกน x ของกราฟ

• กราฟพาราโบลาตัดแกน y หรือไม่
 กราฟพาราโบลาว่าหรือหงายนั้นขึ้นอยู่กับสมการพาราโบลา
 พาราโบลาคือจะบานออกไปทาง $\underline{\hspace{2cm}}$ ซ้ายและ
 ทางด้านขวาได้เรื่อยๆ
 ดังนั้น กราฟพาราโบลานี้จะ $\underline{\hspace{2cm}}$ แกน y
 โดยจุดตัดแกน y หาได้จากการแทนค่า $x = 0$
 ลงไปในสมการเพื่อหาค่า y ที่จะเป็นจุดตัดบนแกน
 y ของกราฟ

เมื่อแทน $y = 0$ แล้วหาค่า x $\underline{\hspace{2cm}}$ จะได้ว่า;

กราฟจะตัดแกน x
 ที่จุด $\underline{\hspace{2cm}}$

กราฟจะไม่ตัดแกน x

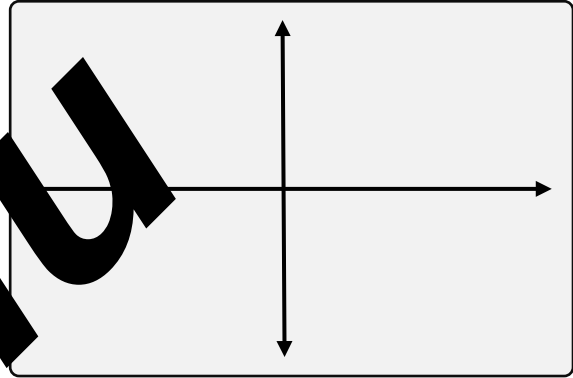
จะได้ว่า; กราฟตัดแกน y ที่ $\underline{\hspace{2cm}}$

• สมการแกนสมมาตรของพาราโบลา $x = h$
 ดังนั้น สมการแกนสมมาตร คือ $\underline{\hspace{2cm}}$

• ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดนั้น จะพิจารณาจากค่า y
 ที่ $\underline{\hspace{2cm}}$ สูงสุดหรือค่าต่ำสุดของกราฟพาราโบลา
 ดังนั้น ค่าสูงสุดคือ $\underline{\hspace{2cm}}$
 ค่าต่ำสุดคือ $\underline{\hspace{2cm}}$

ตัวอย่างที่ 2 $y = -3x^2 + 12x - 12$

- จากสมการ $y = ax^2 + bx + c$
จะได้: $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$, $c = \underline{\hspace{2cm}}$
- ถ้า $a > 0$ จะเป็นกราฟพาราโบลา $\underline{\hspace{2cm}}$
จุดยอดหรือจุดพลิกกลับ (h,k) คือ $\underline{\hspace{2cm}}$
ซึ่งจะอยู่ที่จุด $\underline{\hspace{2cm}}$ ของกราฟ โดยที่กราฟ
พาราโบลานี้จะไม่มีจุด $\underline{\hspace{2cm}}$



กราฟพาราโบลา หรือไม่มีวิธีพิจารณาได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1 หาเครื่องหมายที่ลักษณะกราฟพาราโบลานี้มี
จุดยอดอยู่ที่ $\underline{\hspace{2cm}}$ แกน x
ดังนั้น กราฟพาราโบลานี้จะ $\underline{\hspace{2cm}}$

วิธีที่ 2 ให้แทนค่า $y = \underline{\hspace{2cm}}$ ในสมการพาราโบลา
เพื่อหาค่า x ที่จะเป็นจุดตัดกับแกน x ของกราฟ

เมื่อแทน $y = 0$ แล้วหาค่า $x \underline{\hspace{2cm}}$ จะได้ว่า;

กราฟจะตัดแกน x
ที่จุด $\underline{\hspace{2cm}}$

กราฟจะไม่ตัดแกน x

กราฟตัดแกน y หรือไม่

กราฟพาราโบลาว่าหรือหงายนั้นขึ้นอยู่กับ
พาราโบลาค่าหรือหงายนั้นขึ้นอยู่กับ
พาราโบลาค่าหรือหงายนั้นขึ้นอยู่กับ
พาราโบลาค่าหรือหงายนั้นขึ้นอยู่กับ
พาราโบลาค่าหรือหงายนั้นขึ้นอยู่กับ
พาราโบลาค่าหรือหงายนั้นขึ้นอยู่กับ
พาราโบลาค่าหรือหงายนั้นขึ้นอยู่กับ
พาราโบลาค่าหรือหงายนั้นขึ้นอยู่กับ
พาราโบลาค่าหรือหงายนั้นขึ้นอยู่กับ
พาราโบลาค่าหรือหงายนั้นขึ้นอยู่กับ

ดังนั้น กราฟพาราโบลานี้จะ $\underline{\hspace{2cm}}$ แกน y
โดยจุดตัดแกน y หาได้จากการแทนค่า $x = 0$
ลงไปในสมการเพื่อหาค่า y ที่จะเป็นจุดตัดบนแกน
y ของกราฟ

จะได้ว่า; กราฟตัดแกน y ที่ $\underline{\hspace{2cm}}$

• สมการแกนสมมาตรของพาราโบลา $x = h$
ดังนั้น สมการแกนสมมาตร คือ $\underline{\hspace{2cm}}$

• ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดนั้น จะพิจารณาจากค่า y
ที่ $\underline{\hspace{2cm}}$ สูงสุดหรือค่าต่ำสุดของกราฟพาราโบลา
ดังนั้น ค่า $\underline{\hspace{2cm}}$ คือ $\underline{\hspace{2cm}}$
ค่าต่ำสุด คือ $\underline{\hspace{2cm}}$

หน้า 70-87
มีในเอกสารตัวเต็ม

การนำความรู้เกี่ยวกับพาราโบลาไปช่วยในการแก้ปัญหา

โจทย์ต่อไปนี้จะต้องการให้ใช้ความรู้เกี่ยวกับเรื่องพาราโบลาที่สามารถนำไปช่วยในการประยุกต์ในการแก้ปัญหาที่มีความยากที่หาการได้โดยเฉพาะอย่างยิ่งในส่วนที่เกี่ยวข้องกับค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของกราฟพาราโบลา ซึ่งจะช่วยให้ได้เห็นถึงประโยชน์ของการศึกษาหัวข้อนี้

แบบฝึกหัดที่ 4

นที่

1. นายแดงเป็นเจ้าของร้านขายผลไม้แห่งหนึ่ง ซึ่งพบว่าเขาจะขายได้กำไรตามสมการ ดังนี้

$$y = -\frac{3}{4}x^2 + 15x - 25$$

โดยที่ x คือ จำนวนวิทย์ที่ขายได้, y คือ กำไรที่จะได้จากการขายวิทย์

จงหาว่า นายแดงจะขายวิทย์กี่เครื่องจึงจะได้กำไรมากที่สุด และกำไรมากที่สุดนั้นคือกี่บาท

2. ดำโยนลูกบอลขึ้นไปในอากาศพบว่าลูกบอลจะเคลื่อนที่ในอากาศเป็นไปตามสมการ $y = -x^2 + 5x$ โดยที่ x เป็นเวลาที่ผ่านไปวินาที และ y เป็นความสูงจากพื้นดินของลูกบอลในขณะเวลา x ใดๆ (เมตร) อยากทราบว่า ลูกบอลเคลื่อนที่ได้สูงที่สุดกี่เมตร (ไม่คิดความสูงของดำ) เมื่อเวลาผ่านไปกี่วินาที

3. สมชายเป็นเจ้าของโรงพิมพ์นิตยสารแห่งหนึ่ง เขาพบว่าผลกำไรมีความสัมพันธ์กับจำนวนเล่มของนิตยสารที่เขาจะพิมพ์ด้วยการ

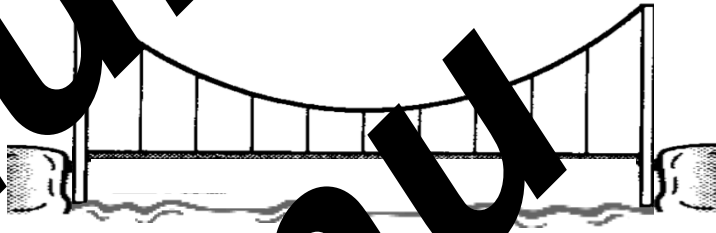
$$P = 560q - 2q^2$$

โดยที่ P คือ กำไร และ q คือ จำนวนเล่มในการผลิตแต่ละครั้ง

สมชายต้องการต้องได้ผลกำไรมากที่สุด ดังนั้นเขาจะพิมพ์ขายออกมาครั้งละกี่เล่ม

และกำไรที่ได้นั้นเท่าไร

4. สะพานแขวนแห่งนี้ยาว 100 เมตร ซึ่งมีลักษณะดังรูป



สะพานแห่งนี้แขวนด้วยสายเคเบิลโค้งพาราโบลาเชื่อมระหว่างเสาด้านสองด้านซึ่งสูงเท่ากัน โดยเชื่อมอยู่ปลาย

สะพานทั้งสองข้างและสายเคเบิลโค้งมีสมการ $y = 0.02x^2 - 2x + 70$

โดยที่ x แทนระยะทางในแต่ละด้านสายเคเบิลอยู่ห่างจากเสาด้านทางซ้ายมือ (เมตร)

y แทนระยะสูงที่เกาะจุดบนสายเคเบิลอยู่สูงจากสะพาน (เมตร)

อยากทราบว่า (1) ระยะห่างระหว่างจุดต่ำสุดของสายเคเบิลกับสะพาน

(2) ความสูงของเสาทั้งสองที่อยู่ปลายสะพาน

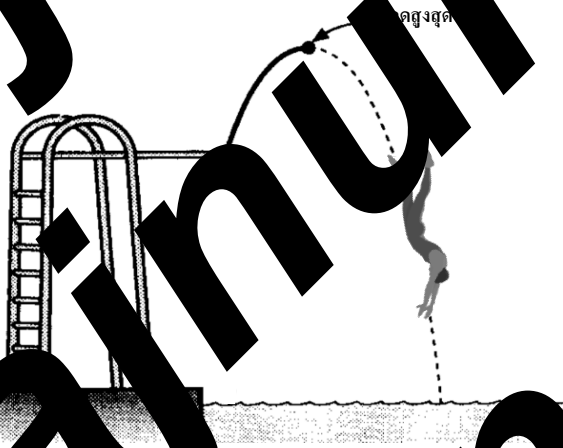
5. จากรูปการกระโดดน้ำ นักกระโดดน้ำจากปลายสปริงบอร์ดซึ่งสูงจากผิวน้ำ 10 เมตร ชายคนนี้เคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งรูปพาราโบลาที่มีสมการดังนี้

$$y = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x + 10$$

โดยที่ y เป็นระยะทาง (เมตร) ที่ชายคนนี้อยู่สูงจากผิวน้ำ

และ x แทนระยะทางที่ชายคนนี้อยู่ไกลในแนวนอนจากปลายสปริงบอร์ด (เมตร)

หากชายคนนี้อยู่สูงที่สุดที่ชายคนนี้อยู่สูงจากแนวราบของสปริงบอร์ด



หน้า 93-111
มีในเอกสารตัวเต็ม