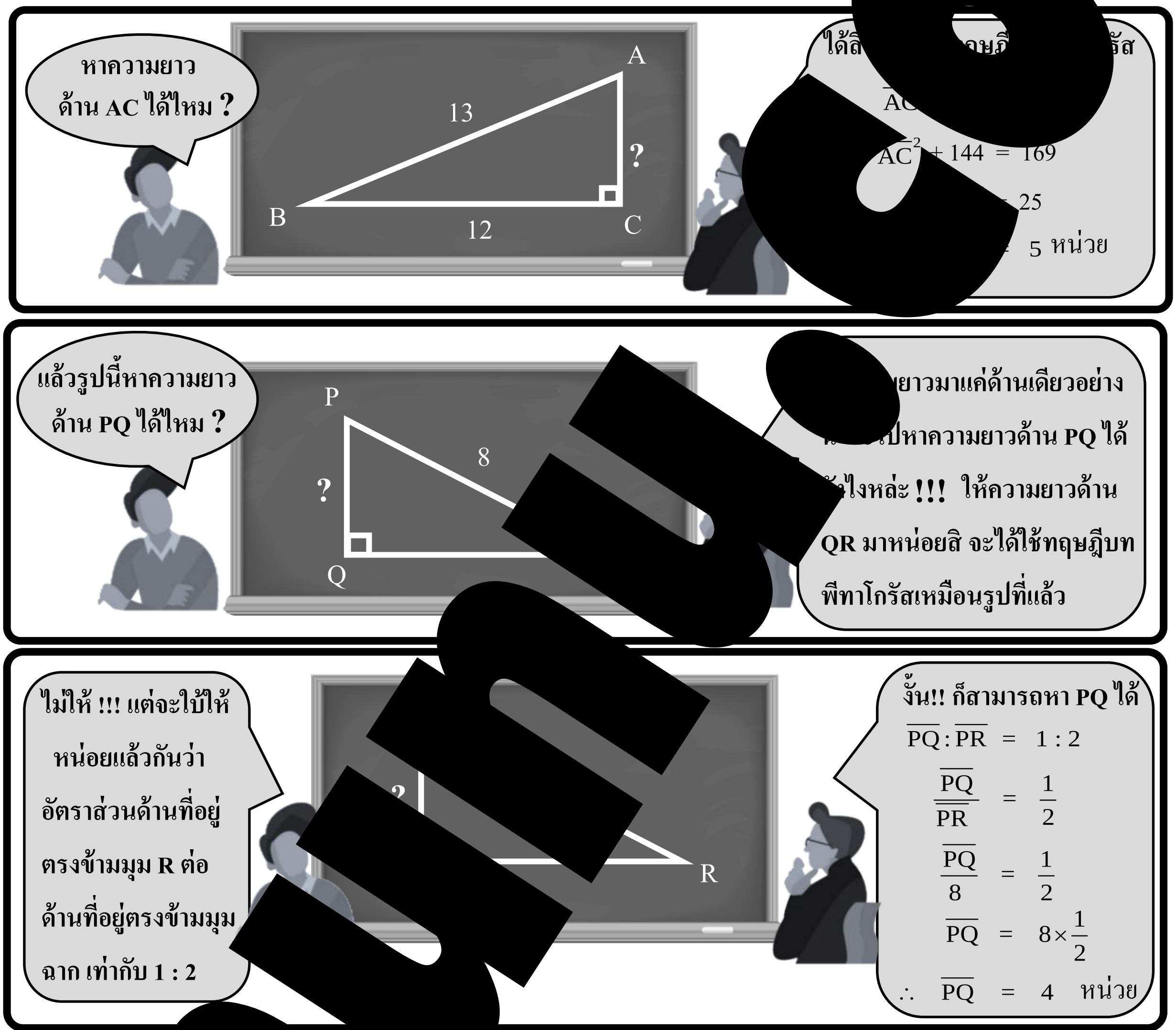
อัตราส่วนตรีโกณมิ[illegible]

เกริ่นนำ



จากเหตุก[illegible]ตเห็นได้ว่า หากเราทราบความยาวด้านสองของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแล้วนั้น เ[illegible]ารถ[illegible]พีทาโกรัสในการหาด้านอีกหนึ่งด้านที่เหลือได้

แต่ท[illegible]วามยา[illegible]เพียงแค่ด้านใดด้านหนึ่งเพียงแค่หนึ่งด้านเท่านั้น เราก็จะไม่สามารถที่จะห[illegible]ยาวของ[illegible]นที่ต้องการหานั้นได้ หากแต่ว่าถ้าเราทราบความสัมพันธ์(อัตราส่วน) ระห[illegible]้องการห[illegible]วามยาวกับด้านที่เรารู้ความยาวแล้วนั้น เราก็จะสามารถใช้การเทียบอัตราส่วนใ[illegible]าวของด้านนั้นๆได้ เราเรียกอัตราส่วนนั้นว่า ***“ อัตราส่วนตรีโกณมิติ ”***

[illegible]ตร[illegible]รีโกณมิติ คือ อัตราส่วนที่บอกความสัมพันธ์ของความยาว[illegible]นสองด้านใดๆในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ข้อตกลงและข้อต้องจำของอัตราส่วนตรีโกณ[illegible]

สำหรับการศึกษาหัวข้อ “ อัตราส่วนโกณมิติ ” นั้น นักเรียนจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้อง[illegible]เข้าใจข้อตกลงและข้อต้องจำต่างๆ ของหัวข้อนี้ซึ่งมีอยู่มากพอสมควร จึงอยากให้นักเรียน[illegible]มาอย่างตั้งใจ รวมทั้งจดจำข้อตกลงและข้อต้องจำต่างๆ ให้ครบถ้วน มิฉะนั้นจะไม่สามารถทำ[illegible] หัวข้อนี้ได้อย่างเข้าใจ

1 การเรียกชื่อด้านของสามเหลี่ยมมุมฉา[illegible]

ในการเรียกชื่อด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากในหัวข้ออัตรา[illegible]ส่วนของด้านประกอบมุมฉากทั้งสองด้านนั้น จะมีการทำข้อตกลงในการเรียกลักษณะ[illegible]งนั้นโดยกำหนดมุมอ้างอิงจากมุมแหลม 1 ใน 2 ของสามเหลี่ยมมุมฉากนั้น ดังนี้

กำหนดสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มาให้ต่อไป[illegible] เป็นมุม[illegible]อิงในการเรียกด้าน

[illegible] ด้านตรงข้ามมุมอ้างอิง

[illegible] คือ ด้านที่ถูกประชิดโดยมุมอ้างอิงกับมุมฉาก

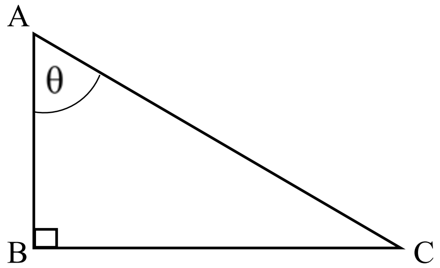
______ คือ ด้านตรงข้ามกับมุมฉาก

ใน[illegible]ตรงข้ามกับมุมฉากนั้น จะสังเกตได้ว่าเราไม่จำเป็นจะต้องพิจารณามุมแหลมที่[illegible]างอิง[illegible]ด้านตรงข้ามมุมฉากนั้น ต่อให้ไม่มีมุมแหลมที่ใช้เป็นมุมอ้างอิงใดๆ กำหนดมา[illegible]จะสามารถพิจารณาได้อยู่ดีว่าเป็นด้านใดเป็นด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมฉาก

แบบฝึกหัดที่ 1.1

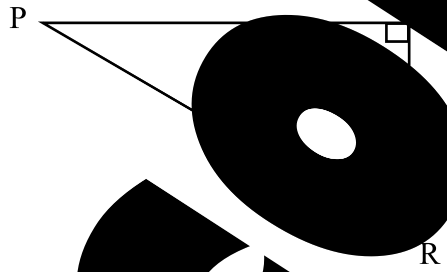
จงเติมคำว่า ข้าม , ชิด , ฉาก ลงไปบนรูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้ เมื่อกำหนดมุมอ้างอิงให้

1. ให้ θ เป็นมุมอ้างอิง



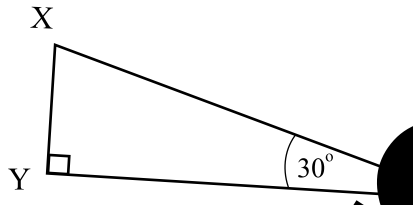
______ คือ ด้านตรงข้ามมุมอ้างอิง
______ คือ ด้านที่ถูกประชิดโดยมุมอ้างอิงกับมุมฉาก
______ คือ ด้านตรงข้ามกับมุมฉาก

2. ให้ θ เป็นมุมอ้างอิง



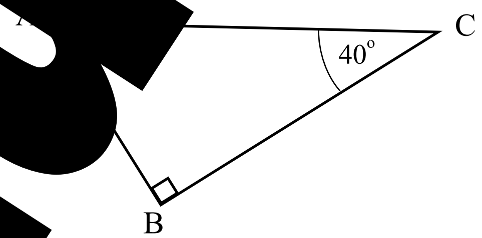
______ คือ ด้านตรงข้ามมุมอ้างอิง
______ คือ ด้านที่ถูกประชิดโดยมุมอ้างอิงกับมุมฉาก
______ คือ ด้านตรงข้ามกับมุมฉาก

3. ให้ 30° เป็นมุมอ้างอิง



______ คือ ด้านตรงข้ามมุมอ้างอิง
______ คือ ด้านที่ถูกประชิดโดยมุมอ้างอิงกับมุมฉาก
______ คือ ด้านตรงข้ามกับมุมฉาก

4. ให้ 40° เป็นมุมอ้างอิง

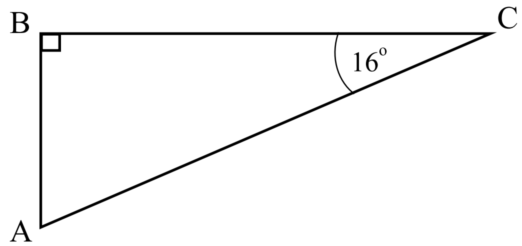


______ คือ ด้านตรงข้ามมุมอ้างอิง
______ คือ ด้านที่ถูกประชิดโดยมุมอ้างอิงกับมุมฉาก
______ คือ ด้านตรงข้ามกับมุมฉาก

5. ให้ 65° เป็นมุมอ้างอิง

______ คือ ด้านตรงข้ามมุมอ้างอิง
______ คือ ด้านที่ถูกประชิดโดยมุมอ้างอิงกับมุมฉาก
______ คือ ด้านตรงข้ามกับมุมฉาก

6. ให้ 16° เป็นมุมอ้างอิง

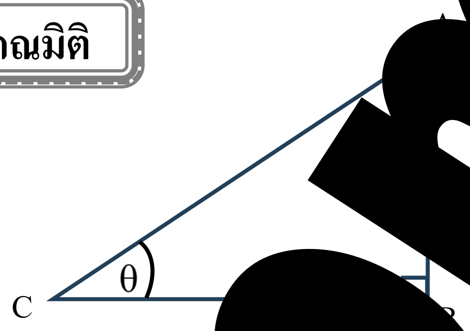


______ คือ ด้านตรงข้ามมุมอ้างอิง
______ คือ ด้านที่ถูกประชิดโดยมุมอ้างอิงกับมุมฉาก
______ คือ ด้านตรงข้ามกับมุมฉาก

หน้า 4-6
มีในเอกสารตัวเต็ม

2 การเรียกชื่อของอัตราส่วนตรีโกณมิติ

กำหนดสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มาให้ต่อไปนี้
โดยมีมุม θ เป็นมุมอ้างอิงในการเรียกด้าน



อัตราส่วนชื่อ sine θ คือ $\dfrac{\text{ความยาวของด้านตรงข้า[illegible]มอ้างอ[illegible]}}{\text{ความยาวของด้าน[illegible]}}$

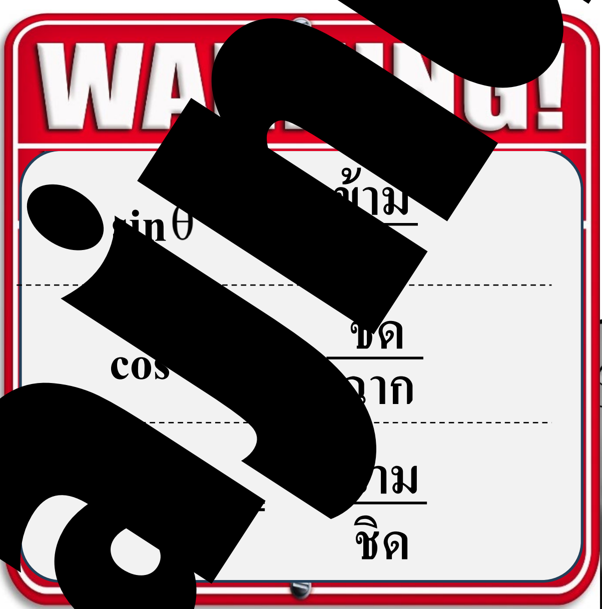
เขียนย่อว่า =

อัตราส่วนชื่อ cosine θ คือ $\dfrac{\text{ความยาวข[illegible]ที่ถูกประชิ[illegible]ากกับมุมอ้างอิง}}{\text{[illegible]ตรงข้ามมุมฉาก}}$

เขียนย่อว่า

อัตราส่วนชื่อ tangent[illegible] $\dfrac{\text{[illegible]ของด้านตรงข้ามมุมอ้างอิง}}{\text{[illegible]ของด้านที่ถูกประชิดด้วยมุมฉากกับมุมอ้างอิง}}$

=



จากอัตราส่วนตรีโกณมิติทั้ง 3 ชื่อ คือ $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ ที่ได้ศึกษาไปก่อนหน้านี้แล้วนั้น [illegible] เราทำการสลับการเอ่ยความสัมพันธ์ของด้านทั้งสองด้านในแต่ละอัตราส่วนแล้วนั้น ก็จ[illegible] อัตราส่วนใหม่ขึ้นมา จึงทำให้มีการเพิ่มชื่อของอัตราส่วนตรีโกณมิติขึ้นมาอีก 3 ชื่อ ดังต่อไป[illegible]

อัตราส่วนชื่อ **sine** θ คือ $\dfrac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมอ้างอิง}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุ[illegible]}}$

อัตราส่วนชื่อ **cosecant** θ คือ $\dfrac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุ[illegible]}}{\text{ความยาวของด้าน[illegible]อ้างอ[illegible]}}$

เขียนย่อว่า =

อัตราส่วนชื่อ **cosine** θ คือ $\dfrac{\text{ความยาวขอ[illegible]ชิดด้วย[illegible]กับมุมอ้างอิง}}{\text{[illegible]มยาว[illegible]มุมฉาก}}$

อัตราส่วนชื่อ **secant** θ คือ $\dfrac{\text{ควา[illegible]รงข้ามมุมฉาก}}{\text{[illegible]านที่ถูกประชิดด้วยมุมฉากกับมุมอ้างอิง}}$

เขียนย่อ[illegible] =

อัตราส่วนชื่อ **tange[illegible]** $\dfrac{\text{[illegible]ามยาวของด้านตรงข้ามมุมอ้างอิง}}{\text{[illegible]ยาวของด้านที่ถูกประชิดด้วยมุมฉากกับมุมอ้างอิง}}$

อัตร[illegible] **cota[illegible]** [illegible]อ $\dfrac{\text{ความยาวของด้านที่ถูกประชิดด้วยมุมฉากกับมุมอ้างอิง}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมอ้างอิง}}$

[illegible]ยนย่อว่า =

[illegible] กับ [illegible] θ	**cos** θ กับ **sec** θ	**tan** θ กับ **cot** θ
[illegible]ปน[illegible]ลับกันและกัน	เป็นส่วนกลับกันและกัน	เป็นส่วนกลับกันและกัน

สรุป ชื่ออัตราส่วนตรีโกณมิติ

$\sin\theta = \dfrac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}$

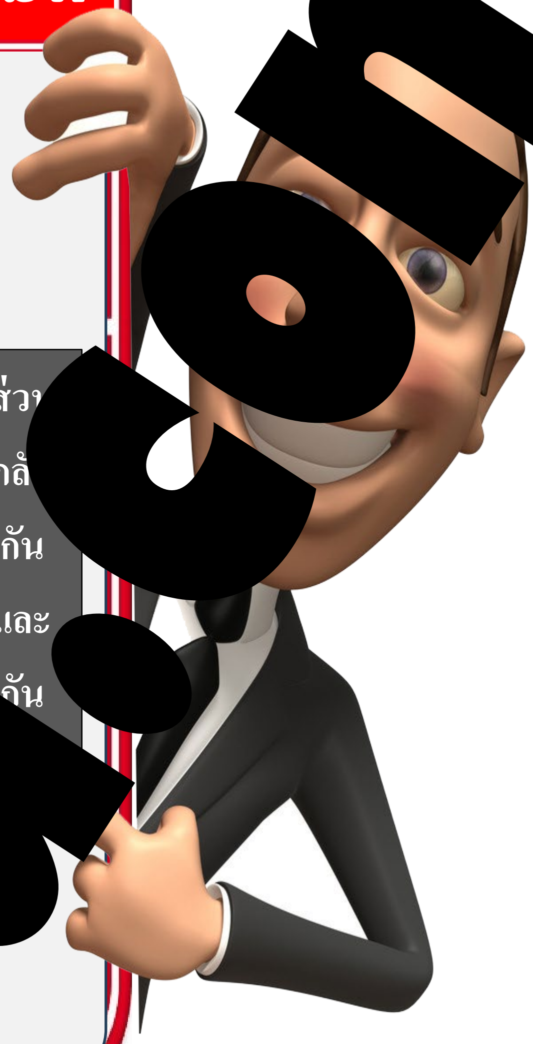
$\tan\theta = \dfrac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$

$\cot\theta = \dfrac{\text{ชิด}}{\text{ข้าม}}$

$\sec\theta = \dfrac{\text{ฉาก}}{\text{ชิด}}$

$\mathrm{cosec}\,\theta = \dfrac{\text{ฉาก}}{\text{ข้า[illegible]}}$

ส่ว[illegible] กลั[illegible] กัน และ กัน



ท่องจ[illegible]ากบนลงล่าง

[illegible]มายเหตุ

[illegible]ียนอัต[illegible]กณมิติในรูปยกกำลังมักนิยมเขียนดังนี้

$(\sin\theta$[illegible] , [illegible]$os\theta)^n$ = ______________ , $(\tan\theta)^n$ = ________________

[illegible]$\theta)^n$ [illegible] , $(\sec\theta)^n$ = ______________ , $(\cot\theta)^n$ = ________________

[illegible] $(\sin\theta)^2$ = ______________ *อย่าเขียนว่า* ________________

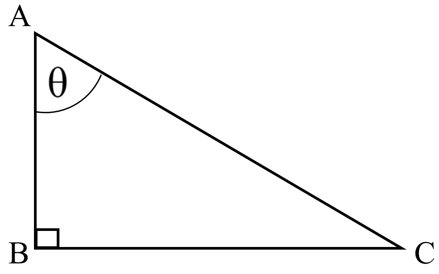
[illegible]^3 = ______________ *อย่าเขียนว่า* ________________

[illegible] $(\tan 30^{\circ})^2$ = ______________ *อย่าเขียนว่า* ________________

แบบฝึกหัดที่ 1.2

ตอนที่ 1 **จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้ จงหาอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดมุมอ้**

1. ให้ θ เป็นมุมอ้างอิง

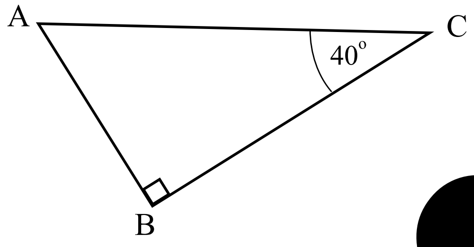


$\sin\theta$ = , c

$\cos\theta$ = , se

$\tan\theta$ = , co

2. ให้ 40° เป็นมุมอ้างอิง

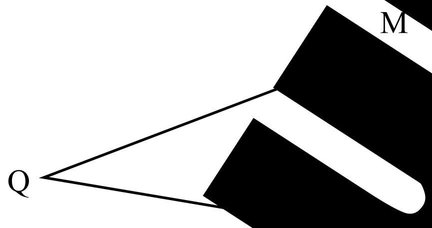


sin ec 40° =

$^\circ$ = , sec 40° =

n 40° , cot 40° =

3. ให้ $T\hat{Q}M$ เป็นมุมอ้างอิง

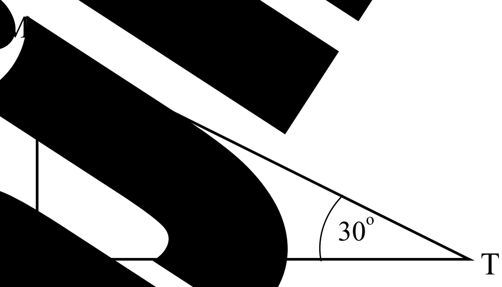


M) = , cosec($T\hat{Q}M$) =

os($T\hat{Q}M$) = , sec($T\hat{Q}M$) =

tan($T\hat{Q}M$) = , cot($T\hat{Q}M$) =

4. ให้ มุมอ้างอ



$\sin 60^\circ$ = , cosec 60° =

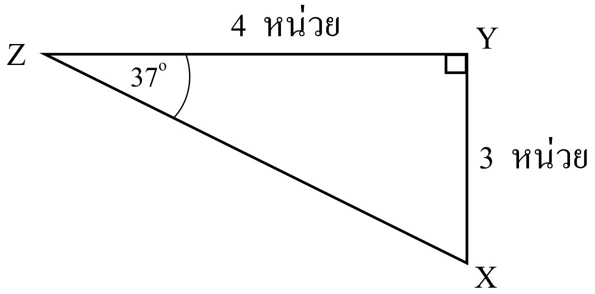
$\cos 60^\circ$ = , sec 60° =

$\tan 60^\circ$ = , cot 60° =

หน้า 11-12
มีในเอกสารตัวเต็ม

ตอนที่ 3 **จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้ จงหาอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดมุมอ้างอิงมาให้**

1. ให้ 37° เป็นมุมอ้างอิง



$\sin 37^\circ$ =

$\cos 37^\circ$ =

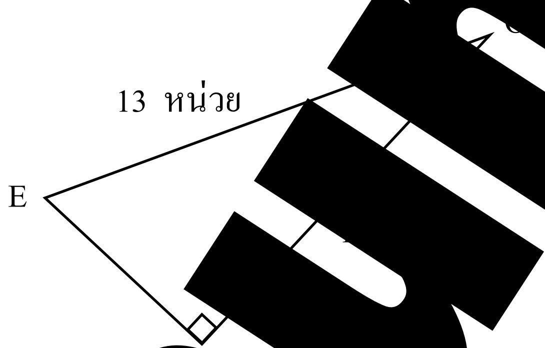
tan 3

7° =

°

37° =

2. ให้ $O\hat{E}T$ เป็นมุมอ้างอิง



$\sin(O\hat{E}T)$ =

$\cos(O\hat{E}T)$ =

$\tan(O\hat{E}T)$ =

$\mathrm{cosec}(O\hat{E}T)$ =

$\sec(O\hat{E}T)$ =

$\cot(O\hat{E}T)$ =

หน้า 14-17
มีในเอกสารตัวเต็ม

ตอนที่ 4 **จงหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติต่อไปนี้ จากอัตราส่วนตรีโกณมิติที่กำหนดมาให้**

1. กำหนดให้ $\sin A = \frac{3}{5}$ จงหาค่าของ

$\cos A$ =
$\tan A$ =
$\operatorname{cosec} A$ =
$\sec A$ =
$\cot A$ =

2. กำหนดให้ $2\cos A = 1$ จงหาค่าของ

$\sin A$ =
$\tan A$ =
$\operatorname{cosec} A$ =
$\sec A$ =

หน้า 19-20
มีในเอกสารตัวเต็ม

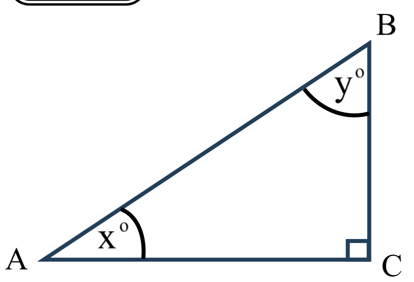
ตอนที่ 5 **จงหาตอบคำถามต่อไปนี้**

1. จากสามเหลี่ยม ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก ให้ $\sin A = \dfrac{3}{5}$ แล้ว จงหาค่าของ $\sin A \cdot \cos A$

2. จากสามเหลี่ยม ABC มีมุม B เป็นม [illegible] 5 แล้ว จงหาค่าของ $\dfrac{\sec A \cdot \operatorname{cosec} A}{\cot A}$

หน้า 22-26
มีในเอกสารตัวเต็ม

3 อัตราส่วนตรีโกณมิติที่เป็น co-function ซึ่งกันและกัน



กำหนดสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มาให้ต่อ[illegible]

โดยที่ มุม BAC มีขนาด x องศา

และ มุม ABC มีขนาด y องศา

จะได้ว่า ; [illegible]

พิจารณาอัตราส่วนตรีโกณมิติต่อไปนี้

$\sin x^\circ$ =	si[illegible]
$\cos x^\circ$ =	cos y[illegible]
$\tan x^\circ$ =	tan [illegible]
$\cot x^\circ$ =	[illegible]t y°
$\sec x^\circ$ =	[illegible] =
$\mathrm{cosec}\ x^\circ$ =	[illegible] y° =

จะสังเกตได้ว่า ;

$\sin x^\circ = \cos y^\circ$
$\cos x^\circ = \sin y$[illegible]

สรุป[illegible]ขนาดมุม[illegible]างอิงของ sin , cos รวมกันได้ 90°
แล้ว [illegible] sin และ cos จะมีค่าเท่ากัน
[illegible] **sin และ cos ว่าเป็น co-function ซึ่งกันและกัน**

ข้อสังเกต : [illegible] sin[illegible] ______ , ชื่อเต็มของ cos คือ ______________

ta[illegible]
tan y[illegible]

[illegible] เมื่อขนาดมุมอ้างอิงของ tan , cot รวมกันได้ 90°
แล้ว ค่า tan และ cot จะมีค่าเท่ากัน
เรียก tan และ cot ว่าเป็น co-function ซึ่งกันและกัน

[illegible]สังเกต : [illegible] tan คือ ___________ , ชื่อเต็มของ cot คือ _______________

sec x[illegible] y°
[illegible] x°

สรุปได้ว่า เมื่อขนาดมุมอ้างอิงของ sec , cosec รวมกันได้ 90°
แล้ว ค่า sec และ cosec จะมีค่าเท่ากัน
เรียก sec และ cosec ว่าเป็น co-function ซึ่งกันและกัน

[illegible] : ชื่อเต็มของ sec คือ ____________ , ชื่อเต็มของ cosec คือ ______________

แบบฝึกหัดที่ 1.3

ตอนที่ 1 จงเติมอัตราส่วนที่เป็น **cofunction** กับอัตราส่วนตรีโกณที่กำหนดมาให้ต่อ[illegible]

1. $\sin 30^{\circ}$ =	2. $\tan 60^{\circ}$ =	3. $\sec 30^{\circ}$ =
4. $\cos 60^{\circ}$ =	5. $\cot 30^{\circ}$ =	6. cose[illegible]
7. $\sin 60^{\circ}$ =	8. $\sec 60^{\circ}$ =	9. c[illegible]
10. $\operatorname{cosec} 30^{\circ}$ =	11. $\cos 30^{\circ}$ =	12. tan[illegible]
13. $\sin 45^{\circ}$ =	14. $\operatorname{cosec} 45^{\circ}$ =	[illegible] =
16. $\cos 45^{\circ}$ =	17. $\tan 45^{\circ}$ =	[illegible]
19. $\sin 10^{\circ}$ =	20. $\cot 38^{\circ}$ =	[illegible]
22. $\sec 25^{\circ}$ =	23. $\sec 0^{\circ}$ =	[illegible] $\tan 41^{\circ}$ =
25. $\cos 1^{\circ}$ =	26. $\sin 72^{\circ}$ =	[illegible] 15° =
28. $\operatorname{cosec} 0^{\circ}$ =	29. tan 90[illegible]	[illegible] $\sec 52^{\circ}$ =
31. $\cot 90^{\circ}$ =	32. cos 6[illegible]	[illegible] $\cot 0^{\circ}$ =
34. $\sec 5^{\circ}$ =	35[illegible]	36. $\cos 0^{\circ}$ =
37. $\cot 9^{\circ}$ =	[illegible]	39. $\cot 3^{\circ}$ =
40. $\cos 90^{\circ}$ =	[illegible] =	42. $\sec 90^{\circ}$ =
43. $\sin 9^{\circ}$ =	44. ta[illegible]	45. $\cos 20^{\circ}$ =
46. $\tan 8^{\circ}$ =	[illegible] 90° =	48. $\sin 90^{\circ}$ =

ตอนที่ 2 จงเติมอัตร[illegible]**ction** กับอัตราส่วนตรีโกณที่กำหนดมาให้ต่อไปนี้

1. $\sin \theta$ [illegible]	2. $\tan \theta$ =
3. co[illegible]	4. $\cos y^{\circ}$ =
[illegible] sec A [illegible]	6. cot B =
[illegible] θ) =	8. $\sec (90^{\circ}-x)$ =
9. tan [illegible]	10. $\operatorname{cosec} (90^{\circ}-B)$ =
[illegible]t $(90^{\circ}-\theta$[illegible]	12. $\cos (90^{\circ}-y)$ =

หน้า 29-35
มีในเอกสารตัวเต็ม

4 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลมที่มีขนาด 30° , 45° , 6

ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่ใช้มุมอ้างอิง 30 , 45 , 60 องศานั้น ถือเป็นข้อต มาก นักเรียนจะต้องทำการจดจำค่าอัตราส่วนเหล่านี้ให้ได้ ในการแก้ปัญหาโจทย์ที่ต้องมีก ตรีโกณมิติที่ใช้มุมอ้างอิง 30 , 45 , 60 องศานั้น ในตัวโจทย์เองมักจะไม่มีการก ลเกี่ย อัตราส่วนตรีโกณมิติที่ใช้มุมอ้างอิง 30 , 45 , 60 เหล่านี้มาด้วย เพราะถือว่า ที่ใช้มุม อ้างอิง 30 , 45 , 60 องศานั้นเป็นค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติพื้นฐานที่นักเรียนจะต้อ ให้

เป็น cofunction กัน sin cos

เป็น cofunction กัน tan

เป็น cofunct

กลับของกันและกัน

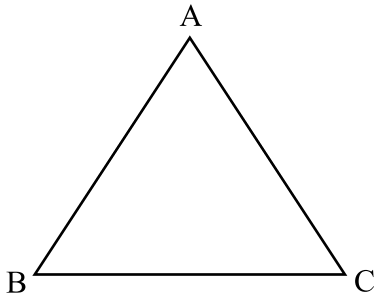
ขนาดมุม / ชื่อ	30	45°	60°
sin			
cos			
ta			
cot			
c			

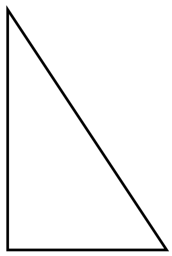
ที่มาของค่า $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ เมื่อ $\theta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$

ขอแบ่งการแสดงที่มาออกเป็น 2 part ดังนี้

Part 1 ที่มาของค่า $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ เมื่อ $\theta = 30^\circ, 60^\circ$

ให้สามเหลี่ยมด้านเท่า ABC มีความยาวของด้านสามเหลี่ยม คือ x หน่วย





เมื่อพิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก________ด้านบนและใช้มุมอ้างอิง คือ 30° จะพบว่า ;

จาก $\sin 30^\circ =$

$\sin 30^\circ =$

$\therefore \sin 30^\circ =$

จาก $\cos 30^\circ =$

$\cos 30^\circ =$

$\therefore \cos 30^\circ =$

จาก $\tan 30^\circ =$

$\tan 30^\circ =$

$\therefore \tan 30^\circ =$

เมื่อพิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก________ด้านบนและใช้มุมอ้างอิง คือ 60° จะพบว่า ;

จาก $\sin 60^\circ =$

[illegible]

$\therefore \sin 60^\circ =$

จาก $\cos 60^\circ =$

$\cos 60^\circ =$

$\therefore \cos 60^\circ =$

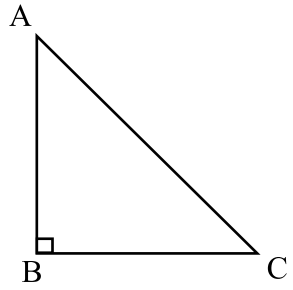
จาก $\tan 60^\circ =$

$\tan 60^\circ =$

$\therefore \tan 60^\circ =$

Part 2 ที่มาของค่า $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ เมื่อ $\theta = 45^{\circ}$

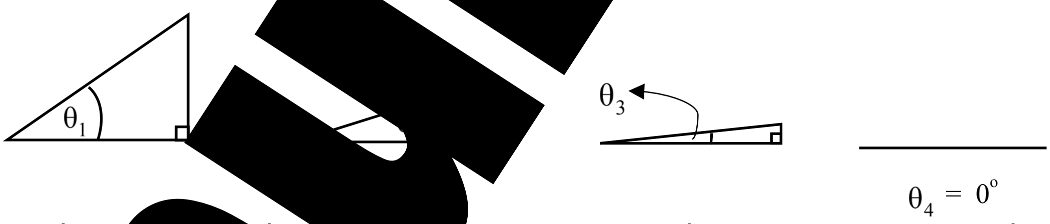
ให้สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีด้านประกอบมุมฉากทั้งสองด้านยาวเท่ากันด้าน



เมื่อพิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก________ ด้านบนและใช้ พบว่า ;

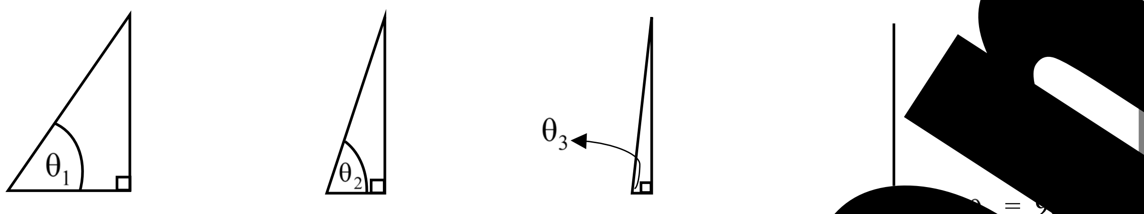
จาก $\sin 45^{\circ}$ =	จาก $\cos 45^{\circ}$	$\tan 45^{\circ}$ =
∴ $\sin 45^{\circ}$ =	∴	∴ $\tan 45^{\circ}$ =

0°, ะ $\tan 0^{\circ}$



เมื่อพิจ ายไปขวา จะพบว่าเมื่อมุมอ้างอิงมีขนาดลงลงไปเรื่อยๆ จน θ_4 มีขนาด ด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมอ้างอิง(ข้าม) นั้นจะมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น

ค่า sin 90°, cos 90° และ tan 90°



เมื่อพิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉากจากซ้ายไปขวา จะพบว่าเมื่อมุมอ้างอิงมีข[illegible] จน θ_4 มีขนาด 90° แล้วนั้น ความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมอ้างอิง (ข้าม) จะมีค[illegible]้านต[illegible] ฉาก(ฉาก) และความยาวของด้านที่ถูกประชิดด้วยมุมฉากกับมุมอ้างอิ[illegible] นั้นจ[illegible]นั้น

ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิ[illegible] θ = [illegible], 45°, 60°, 90°

ขนาดมุม / ชื่อ	0°	[illegible]	45°	60°	90°
sin					
cos					
tan					
c[illegible]					
[illegible]ec					
cos[illegible]					

หมายเหตุ

จากตารางข้างต้น นักเรียนจะสังเกตเห็นว่าค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติบางอัตราส่วนนั้[illegible] รูปของเศษส่วนโดยที่ตัวส่วนติดเครื่องหมายกรนฑ์ ($\sqrt{\ }$) ซึ่งการเขียนลักษณะเช่นนี้ไ[illegible]ในทาง คณิตศาสตร์ ดังนั้น หากต้องการไม่ให้ตัวส่วนติดเครื่องหมายกรนฑ์($\sqrt{\ }$) แล้วนั้น สามารถ[illegible] กรณฑ์($\sqrt{\ }$)ในตำแหน่งส่วนนั้นคูณเข้าทั้งตัวเศษและตัวส่วนได้ ดังนี้

เช่น $\frac{1}{\sqrt{2}} =$

$\frac{1}{\sqrt{3}} =$

$\frac{2}{\sqrt{3}} =$

แบบฝึกหัดที่ 1.4

ตอนที่ 1 **จงตอบคำถามที่กำหนดมาให้ต่อไปนี้**

1. ค่าของ $3\sin 30^\circ - 7\cos 60^\circ$ มีค่าเท่าไร

2. ค่าของ $6\sin 30^\circ + 3\tan 45^\circ$ มีค่าเท่าไร

3. ค่าของ $2\tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ$ มีค่า[illegible]

4. ค่าของ 6[illegible]0° มีค่าเท่าไร

หน้า 42-46
มีในเอกสารตัวเต็ม

ตอนที่ 2 **จงตอบคำถามที่กำหนดมาให้ต่อไปนี้**

1. ค่าของ $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$ มีค่าเท่าไร

2. ค่าของ $2\tan^2 60^\circ + \tan 45^\circ$ มีค่าเท่าไร

3. ค่าของ $\cot^2 30^\circ - 9\tan^2 30$ [illegible]

[illegible] ค่าของ [illegible] $7\tan$ [illegible] 0° มีค่าเท่าไร

หน้า 48-61
มีในเอกสารตัวเต็ม

ตอนที่ 3 **จงตอบคำถามที่กำหนดมาให้ต่อไปนี้**

1. จงหา θ จากสมการ $1-\sqrt{2}\sin\theta = 0$

2. จงหา θ จากสมการ $2\sin\theta-1 = 0$

3. จงหา θ จากสมการ $1-2\cos\theta$

4. จงหา θ $\tan\theta$ $= 0$

หน้า 63-64
มีในเอกสารตัวเต็ม

ตอนที่ 4 **จงตอบคำถามที่กำหนดมาให้ต่อไปนี้**

1. จาก $x \sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ = 8$ จงหาค่า x

2. จาก $x \cos 60^\circ \cdot \sin 60^\circ = 6$ จงหาค่า x

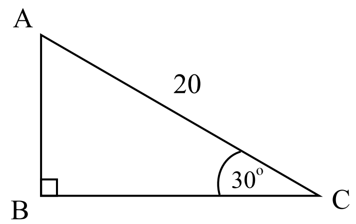
3. จาก $2x \tan 30^\circ \cdot$ sec [illegible] จงหาค่า [illegible]

หน้า 66-72
มีในเอกสารตัวเต็ม

การใช้อัตราส่วนตรีโกณหาความยาวของด้านสามเหลี่ยมมุมฉาก

การนำความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตีโกนมิติไปใช้ในการหาความยาวของด้านที่ไม่ทราบค่าข มุมฉากนั้น โดยทั่วไปเรานิยมใช้อัตราส่วนตรีโกนมิติ $\sin\theta$, $\cos\theta$ และ $\tan\theta$ 3 อัตร หา ความยาวใดๆ ที่ไม่ทราบค่าของรูปสามเหลี่ยมนั้นๆ

ตัวอย่างที่ 1 จากรูป จงหาความยาวของ $\overline{AB}$



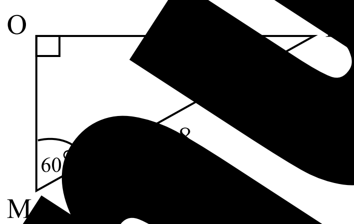
เมื่อให้มุมอ้างอิง คือ _______

ต้องการหา _______ เมื่อทราบ________

ต้องใช้อัตราส่วนเกี่ยวกับ ______________

ซึ่งก็คือ ____________

ตัวอย่างที่ 2 จากรูป จงห อง $\overline{OM}$

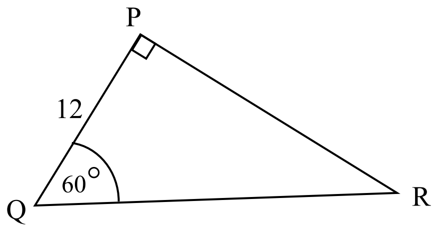


ให้มุม

ทราบ________

อัตร บ ________________

ตัวอย่างที่ 3 จากรูป จงหาความยาวของ $\overline{PR}$



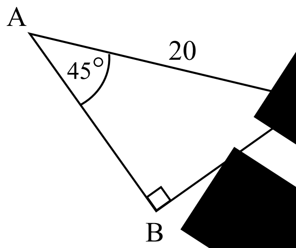
เมื่อให้มุมอ้างอิง คือ _______

ต้องการหา _______ เมื่อทราบ________

ต้องใช้อัตราส่วนเกี่ยวกับ ________________

ซึ่งก็คือ _____________

ตัวอย่างที่ 4 จากรูป จงหาความยาวของ $\overline{AB}$



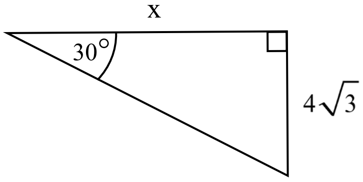
เมื่อให้มุมอ้างอิง คือ [illegible]

ต้องการห[illegible]ทราบ________

ต้อง[illegible]กี่ยวกับ [illegible]____________

[illegible]

ตัวอย่างที่ 5 จากรูป จงหาความยาวของ x



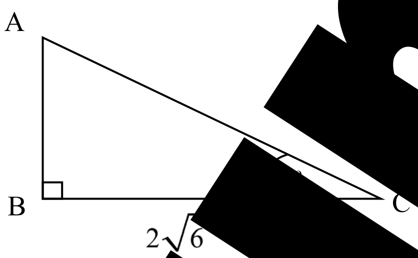
เมื่อให้มุมอ้างอิง คือ _______

ต้องการหา _______ เมื่อทราบ________

ต้องใช้อัตราส่วนเกี่ยวกับ _______________

ซึ่งก็คือ ____________

ตัวอย่างที่ 6 จากรูป จงหาความยาวของ $\overline{AC}$



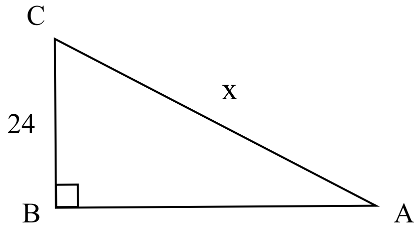
เมื่อให้มุมอ้างอิง คือ ...

ต้องการห... ทราบ_______

ต้อ... เกี่ยวกับ ...____________

... ____

ตัวอย่างที่ 7 จากรูป จงหา x เมื่อ $\sin A = \frac{3}{5}$



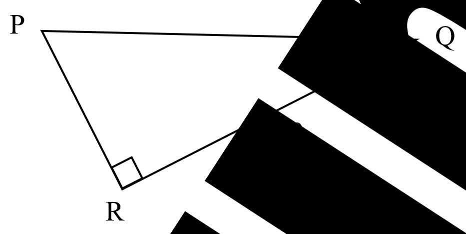
เมื่อให้มุมอ้างอิง คือ _______

ต้องการหา _______ เมื่อทราบ________

ต้องใช้อัตราส่วนเกี่ยวกับ ________________

ซึ่งโจทย์ได้กำหนดมาให้ว่า ________________

ตัวอย่างที่ 8 จากรูป จงหาความยาวข ... เมื่อ ... $\frac{5}{12}$



เมื่อให้มุมอ้าง... คือ ___

ต้องการ... ________

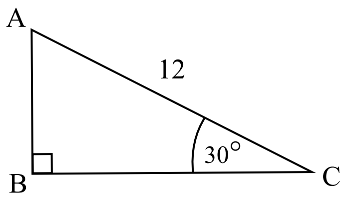
ต้อง... กับ ________________

...ด้กำหน... ________________

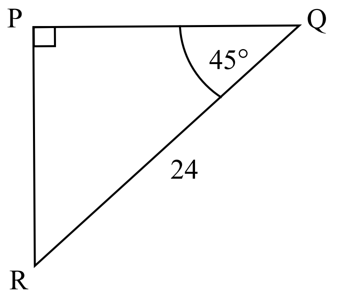
แบบฝึกหัดที่ 2

ตอนที่ 1 **จงตอบคำถามที่กำหนดมาให้ต่อไปนี้**

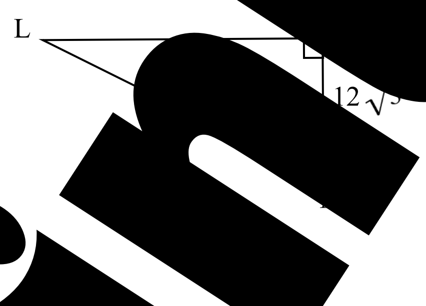
1. จากรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ จงหาความยาวของ $\overline{AB}$



2. จากรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ จงหาความยาวของ [illegible]



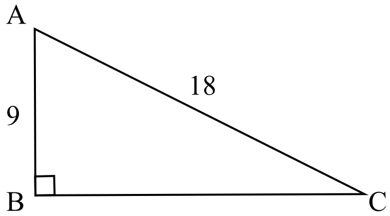
3. จากรูปสามเหลี่ยม[illegible]ให้ จง[illegible]ของ $\overline{LM}$



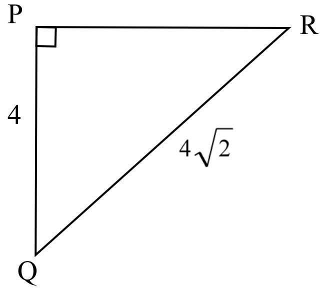
หน้า 78-81
มีในเอกสารตัวเต็ม

ตอนที่ 2 **จงตอบคำถามที่กำหนดมาให้ต่อไปนี้**

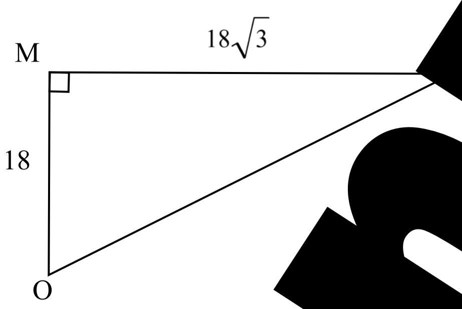
1. จากรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ จงหาขนาดของมุม $A\hat{C}B$



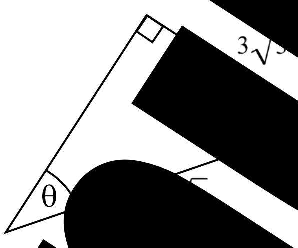
2. จากรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ จงหาขนาดของมุม $P\hat{Q}R$



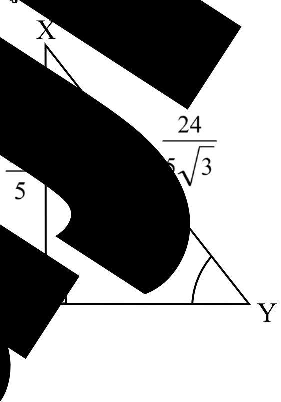
3. จากรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ จงหาขนาดขอ



4. จากรูปสามเหลี่ยมที่ก ให้ จงห ม θ



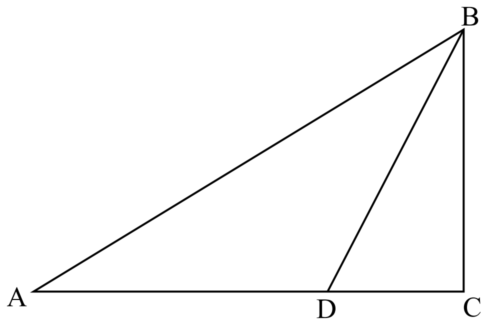
5. จาก ที่กำหน ให้ จงหาขนาดของมุม Y



หน้า 83
มีในเอกสารตัวเต็ม

ตอนที่ 3 **จงตอบคำถามที่กำหนดมาให้ต่อไปนี้**

1. ให้ BC = 4 เซนติเมตร , $A\hat{B}D = 30^{O}$, $B\hat{D}C = 60^{O}$, $A\hat{C}B = 90^{O}$ จงหา $\overline{AB}$ ยาวกี่เซนติเ[illegible]



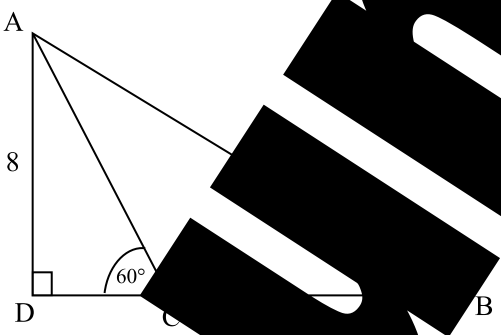
1) 6 เซนติเมตร[illegible]

2) 8 เซนติ[illegible]

3) 9 [illegible]

4) 9.5 [illegible]

2. จงหาความยาวของ $\overline{BC}$ ยาวเท่าไร



1) $15\sqrt{3}$ หน่วย

2) $\frac{15}{\sqrt{3}}$ หน่วย

3) $16\sqrt{3}$ หน่วย

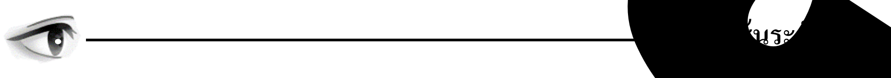
4) $\frac{16}{\sqrt{3}}$ หน่วย

หน้า 85-94
มีในเอกสารตัวเต็ม

การใช้อัตราส่วนตรีโกณในการหาระยะทางและความสูง

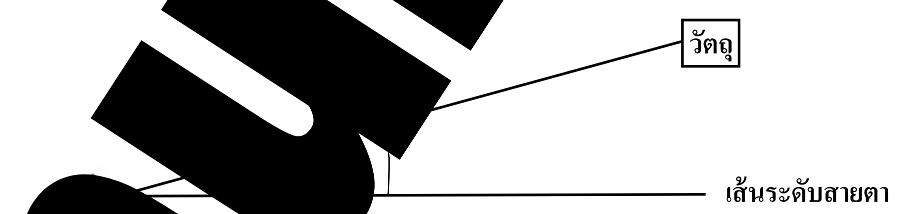
ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาระยะทางและความสูงในโลกของความเป็นจริงนั้น [illegible] สามารถใช้เครื่องมือวัดระยะกับสถานที่หรือสิ่งนั้นๆได้โดยตรงเพราะทำได้ยาก เช่ [illegible] ความสูงของภูเขา การวัดความลึกของเหว การวัดความกว้างของแม่น้ำ เป็นต้น แต่ทว่าเราสามา [illegible] เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกนมิตินี้มาใช้ในการประยุกต์เพื่อแก้ปัญหานี้ได้ ซึ่งก่อ [illegible] ต้องทำค [illegible] เข้าใจกับคำศัพท์และข้อตกลงที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อนี้ดังต่อไปนี้เสียก่อน

1. **เส้นระดับสายตา** หมายถึง เส้นตรงที่ลากจากตาของผู้สังเกต [illegible] แนวขนา [illegible]



2. **มุมก้ม** หมายถึง มุมที่เกิดระหว่างเซลล์ระดับสายตากับเส้นที่ลากจาก [illegible] ไปยังวัตถุที่อยู่ต่ำกว่าเส้นระดับสายตา

3. **มุมเงย** หมายถึง มุมที่เกิ [illegible] ร์ระดับ [illegible] บเส้นที่ลากจากสายตาไปยังวัตถุที่อยู่สูงก [illegible] ระดับสา [illegible]



หมายเหตุ

1. พื้น [illegible] ให้ถือว่าเป็นแนวราบทั้งหมด
2. [illegible] ที่โผล่เห [illegible] ขึ้นมา เช่น เสาธง, ภูเขา, ต้นไม้ , อาคารหรือตึก เป็นต้น ให้ถือว่า [illegible] ยู่ในรูปของเส้นตรงที่โผล่ขึ้นมา ยกเว้นแต่ว่าโจทย์จะกำหนดเป็นอย่างอื่น
3. ในส [illegible] ตนั้น หากโจทย์ไม่ได้กำหนดความสูงของผู้สังเกตมา ในการคำนวณให้ถือ [illegible] ความสู [illegible] เกตนั้นเป็นศูนย์

แบบฝึกหัดที่ 3

ตอนที่ 1 **จงตอบคำถามที่กำหนดมาให้ต่อไปนี้**

1. ต้นไม้ต้นหนึ่งทอดเงายาว 50 เมตร แนวของเส้นตรงที่ลากผ่านจุดปลายของเงาต้นไม้ [illegible] ไม้ทำมุม 30 องศากับเงาของต้นไม้ที่อยู่บนพื้น   อยากทราบว่า ต้นไม้ต้นนี้มีความสูงกี่เมตร

หน้า 97-110
มีในเอกสารตัวเต็ม

ตอนที่ 2 **จงตอบคำถามที่กำหนดมาให้ต่อไปนี้**

1. นาย ก อยู่ทางทิศเหนือของเจดีย์แห่งหนึ่งวัดมุมเงยของเจดีย์ได้ 45 องศา ส่วนนาย ข ยืนอยู่
   มุมเงยของเจดีย์ได้ 30 องศา ถ้าเจดีย์สูง 120 เมตร นาย ก และนาย ข ยืนอยู่ห่างกันกี่เมต

หน้า 112-114
มีในเอกสารตัวเต็ม

ตอนที่ 3 **จงตอบคำถามที่กำหนดมาให้ต่อไปนี้**

1. นายดำยืนอยู่ห่างจากตึกหลังหนึ่ง 24 เมตร มองเห็นยอดตึกและเสาอากาศ ซึ่งอยู่บนยอ[illegible]มุม[illegible] 30 องศาและ 60 องศา ตามลำดับ จงหาความสูงของเสาอากาศที่อยู่บนยอดตึกแห่งน[illegible]

หน้า 116-119
มีในเอกสารตัวเต็ม

ตอนที่ 4 **จงตอบคำถามที่กำหนดมาให้ต่อไปนี้**

1. ชายสองคนยืนอยู่ตรงข้ามของอาคารหลังหนึ่งซึ่งสูง 120 เมตร ทั้งสองวัดมุมเงยของอา[illegible] และ 45 องศา ตามลำดับ อยากทราบว่า ชายสองคนนี้ยืนอยู่ห่างกันเท่าไร

หน้า 121-129
มีในเอกสารตัวเต็ม

ตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 0-90 [illegible]

นอกจากอัตราส่วนตรีโกนมิติของมุม 0 , 30 , 45 , 60 และ 90 องศาที่เป็นข้อต[illegible] [illegible]นักเรียน จะต้องท่องจำได้แล้วนั้น หากเป็นค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่นอกเหนือจากข้างต้นแล้วน[illegible] หาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของขนาดมุมอื่นๆ ได้จากตารางที่กำหนดให้ดังต่อ[illegible]

A	SIN(A)	COS(A)	Tan(A)
0	0.0000	1.0000	0.0000
1	0.0175	0.9998	0.0175
2	0.0349	0.9994	0.0349
3	0.0523	0.9986	0.0524
4	0.0698	0.9976	0.0699
5	0.0872	0.9962	0.0875
6	0.1045	0.9945	0.1051
7	0.1219	0.9925	0.1228
8	0.1392	0.9903	0.1405
9	0.1564	0.9877	0.1584
10	0.1736	0.9848	0.1763
11	0.1908	0.9816	0.1944
12	0.2079	0.9781	0.2126
13	0.2250	0.9744	0.2309
14	0.2419	0.9703	0.2493
15	0.2588	0.9659	0.2679
16	0.2756	0.9613	0.2867
17	0.2924	0.9563	[illegible]
18	0.3090	0.9511	[illegible]
19	0.3256	0.9455	[illegible]
20	0.3420	[illegible]	[illegible]
21	0.3584	[illegible]	[illegible]
22	0.3746	[illegible]	[illegible]
23	0.3907	[illegible]	[illegible]
24	0.4067	[illegible]	[illegible]
25	0.4226	[illegible]	[illegible]
26	[illegible]	[illegible]	[illegible]
27	[illegible]	[illegible]	[illegible]
28	[illegible]	[illegible]	[illegible]
29	0.4848	[illegible]	[illegible]
30	[illegible]	[illegible]	[illegible]
31	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.6249
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.6494
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.6745
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.7002
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.7265
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.7536
[illegible]	[illegible]	0.7880	0.7813
[illegible]	[illegible]	0.7771	0.8098
[illegible]	[illegible]	0.7660	0.8391
41	[illegible]	0.7547	0.8693
[illegible]	[illegible]	0.7431	0.9004
[illegible]	[illegible]	0.7314	0.9325
[illegible]	0.6947	0.7193	0.9657
[illegible]	0.7071	0.7071	1.0000

A	SIN(A)	[illegible]	[illegible]
45	0.7071	[illegible]	[illegible]
46	[illegible]	[illegible]	[illegible]
47	[illegible]	[illegible]	[illegible]
48	[illegible]	[illegible]	[illegible]
49	[illegible]	[illegible]	1.1504
50	[illegible]	[illegible]	[illegible]
51	[illegible]	[illegible]	[illegible]
52	[illegible]	[illegible]	1.2799
53	0.7986	[illegible]	1.3270
54	[illegible]	0.5878	1.3764
55	[illegible]	[illegible]	1.4281
[illegible]	[illegible]	[illegible]	1.4826
[illegible]	[illegible]	[illegible]	1.5399
[illegible]	[illegible]	0.5299	1.6003
[illegible]	[illegible]	0.5150	1.6643
[illegible]	[illegible]	0.5000	1.7321
[illegible]	[illegible]	0.4848	1.8040
[illegible]	[illegible]	0.4695	1.8807
[illegible]	0.8910	0.4540	1.9626
64	0.8988	0.4384	2.0503
[illegible]	0.9063	0.4226	2.1445
[illegible]	0.9135	0.4067	2.2460
67	0.9205	0.3907	2.3559
68	0.9272	0.3746	2.4751
69	0.9336	0.3584	2.6051
70	0.9397	0.3420	2.7475
71	0.9455	0.3256	2.9042
72	0.9511	0.3090	3.0777
73	0.9563	0.2924	3.2709
74	0.9613	0.2756	3.4874
75	0.9659	0.2588	3.7321
76	0.9703	0.2419	4.0108
77	0.9744	0.2250	4.3315
78	0.9781	0.2079	4.7046
79	0.9816	0.1908	5.1446
80	0.9848	0.1736	5.6713
81	0.9877	0.1564	6.3138
82	0.9903	0.1392	7.1154
83	0.9925	0.1219	8.1443
84	0.9945	0.1045	9.5144
85	0.9962	0.0872	11.4301
86	0.9976	0.0698	14.3007
87	0.9986	0.0523	19.0811
88	0.9994	0.0349	28.6363
89	0.9998	0.0175	57.2900
90	1.0000	0.0000	∞

หน้า 131-132
มีในเอกสารตัวเต็ม

เอกลักษณ์ของอัตราส่วนตรีโกณมิติ

เอกลักษณ์ของอัตราส่วนตรีโกณมิติ คือ รูปแบบของสมการอัตราส่วน [illegible] ป็นจริง เสมอไม่ว่าจะแทนที่ตัวแปรด้วยจำนวนจริงใดๆก็ตาม

> เอกลักษณ์ของอัตราส่วนตรีโกณมิติเบื้องต้น ผู้เขียนขอแบ่งอ [illegible]
> ตามลักษณะความสัมพันธ์ ดังนี้
> กลุ่มที่ 1 ความสัมพันธ์ที่เป็นส่วนกลับของกันและกั [illegible]
> กลุ่มที่ 2 ความสัมพันธ์ในรูปเศษส่วน
> กลุ่มที่ 3 ความสัมพันธ์ที่มาจากทฤษฎีบทพีทา [illegible]

กลุ่มที่ 1 ความสัมพันธ์ที่เป็นส่วนกลับของกันและกัน

กำหนดสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มาให้ดั [illegible] θ เป [illegible] งอิงในการเรียกด้าน

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุ [illegible]

1

จาก [illegible] (1) , (2)

นำ (1) x (2)

ดังนั้ [illegible]

[illegible] ยคว [illegible] ว่า ____________________ เป็นส่วนกลับของกันและกัน

2

จาก ______ 1 , ______

นำ 1 x 2 ;

ดังนั้น

หมายความว่า ______ ส่วนก ของกันและกัน

3

จาก ______ ______ 2

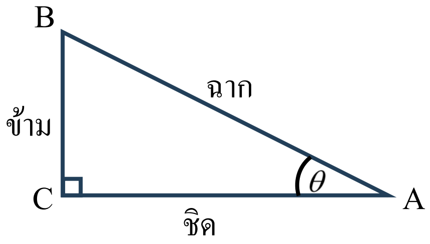
นำ 1 x 2

ดังน

่า ______ เป็นส่วนกลับของกันและกัน

กลุ่มที่ 2 **ความสัมพันธ์ในรูปเศษส่วน**

กำหนดสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มาให้ต่อไปนี้ โดยมีมุม θ เป็นมุมอ้างอิงในก



พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

1

จาก ——① , ——②

นำ $\dfrac{①}{②}$;

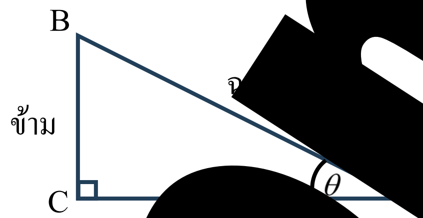
ดังนั้น

2

จาก ——① , ——②

กลุ่มที่ 3 ความสัมพันธ์ที่มาจากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

กำหนดสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มาให้ต่อไปนี้
โดยมีมุม θ เป็นมุมอ้างอิงในการเรียกด้าน



พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

1

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

นำ $\frac{1}{\text{ฉาก}^2}$;

ดังนั้น

2

จากทฤษฎีบ — 1

นำ $\frac{1}{\quad^2}$

ดังนั้น

3

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส ⟶ 1

นำ $\dfrac{1}{\text{ข้าม}^2}$;

ดังนั้น

สรุป

เอกลัก ... นตรีโกณมิติเบื้องต้น

... ที่เป็นส่วนกลับของกันและกัน

กลุ่มที่ 2 ความสัมพันธ์ในรูปเศษส่วน

กลุ่มที่ 3 ความสัมพันธ์ที่มาจากทฤ[illegible]ทาโ[illegible]

การใช้เอกลักษณ์อัตราส่วนตรีโกณมิติในการพิสูจน์

คือ การแสดงให้เห็นจริงว่าทั้งสองข้างของสมการมีค่าเท่ากันทุกกรณี โดยทั่วไป [illegible] เอกลักษณ์ของอัตราส่วนตรีโกณมิตินั้น เราจะทำให้ข้างใดข้างหนึ่งนั้นไปเท่ากับอีกข้ [illegible] แต่ [illegible] ในบางครั้งอาจจะมีโจทย์ที่ซับซ้อนมากขึ้น ซึ่งอาจจะต้องพยายามทำการพิสูจน์ให้ทั้ง [illegible] ค่า เท่ากันในรูปของสิ่งเดียวกันก่อนแล้วจึงจะสามารถสรุปได้ว่ามีค่าเท่ากัน

หลักการทั่วไปของการใช้เอกลักษณ์อัตราส่วนตรีโกณมิติในการ [illegible]

1. พยายามเปลี่ยนรูปจากด้านที่มีความยุ่งยาก ซับซ้อน ให้เป็นรูปง่ายกว [illegible] น้อยกว่าเดิม
2. ควรเปลี่ยนรูปของอัตราส่วนตรีโกณมิติที่กำหนดให้นั้นใ [illegible] sin [illegible] รือ cos ทั้งหมดเพื่อสะดวกต่อการพิสูจน์ แต่ถ้าหากว่าการเปลี่ยนเป็นรูป si [illegible] นั้นทำให้เกิดความยุ่งยากหรือยาวเกินไปก็ไม่ควรจะเปลี่ยน

> อย่างไรก็ตามหลักการที่กล่าวมาข้างต้นนั้น เป็นเพียงแค่ [illegible] รพื้นฐานทั่วไปเท่านั้น สิ่งที่สำคัญที่สุด คือ การที่ผู้เรียนได้ฝึกฝนการพิ [illegible] ลักษณ์บ [illegible] หลายรูปแบบ จะทำให้ผู้เรียนมีความเชี่ยวชาญในการมองความสัมพันธ์ [illegible]

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

ก. $\sin\theta \cdot \cot\theta = $ co [illegible]	[illegible] $s\theta \cdot \tan\theta = \sin\theta$
ค. $\cot\theta$ [illegible] $c\theta =$ [illegible]	ง. $\cos\theta \cdot \mathrm{cosec}\,\theta = \cot\theta$

[illegible] อย่างที่ 2 [illegible] ว่า $\dfrac{\sin\theta \cdot \cot\theta}{\cos\theta} = 1$

ตัวอย่างที่ 3 จงพิสูจน์ว่า $\sin A \cdot \cot A \cdot \sec A = 1$

ตัวอย่างที่ 4 จงพิสูจน์ว่า $\dfrac{1-\sin^2 A}{\cos^2 A} + \dfrac{1-\cos^2 A}{\sin^2 A} = 2$

ตัวอย่างที่ 5 จงพิสูจน์ว่า $\cos^2 A(1 + \tan^2 A)$ [illegible]

ตัวอย่างที่ 6 [illegible] $+ \dfrac{1}{1+\cot^2\theta} = 1$

หน้า 141-143
มีในเอกสารตัวเต็ม

แบบฝึกหัดที่ 5

ตอนที่ 1 **จงพิสูจน์เอกลักษณ์ของอัตราส่วนตรีโกณที่กำหนดให้ต่อไปนี้**

1. จงพิสูจน์ว่า $\cot A \cdot \sec A = \operatorname{cosec} A$

2. จงพิสูจน์ว่า $\sin A \cdot \cos A \cdot \operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sec A}$

3. จงพิสูจน์ว่า $2\sin^2\theta - 1 = 1 - 2$ [illegible]

4. จงพิสูจน์ว่า tan [illegible] $= \sec^2\theta - \operatorname{cosec}^2\theta$

[illegible]จน์ว่า [illegible]$\theta(1 + \cot^2\theta) = 1$

หน้า 145-150
มีในเอกสารตัวเต็ม

ตอนที่ 2 **จงตอบคำถามที่กำหนดให้ต่อไปนี้**

1. ค่าของ $\sec A \cdot \sin A$ มีค่าตรงกับข้อใด

   1) $\cos A$ 2) $\cot A$ 3) $\tan A$ 4) c [illegible]

2. ค่าของ $\dfrac{\sin A \cdot \cot^2 A}{\cos A}$ มีค่าตรงกับข้อใด

   1) $\dfrac{1}{\tan A}$ 2) $\dfrac{1}{\sin A}$ 3) $\tan A$ 4) $\cos A$

3. ค่าของ [illegible] tan [illegible] cosec [illegible] −1 / [illegible]ot θ มีค่าตรงกับข้อใด

   1) [illegible] 2) [illegible]2 3) $\sin \theta$ 4) $\cos \theta$

หน้า 152-163
มีในเอกสารตัวเต็ม