

กบกกบ

เอกสารประกอบการเรียน
วิชา คณิตศาสตร์

ตัวอย่าง
sample

ความเท่ากันทุกประการ

เอกสารตัวอย่างจริง
ไม่มีลายน้ำ

เอกสารนี้เผยแพร่ที่: ajnunu.com

ข้อกำหนดในการใช้เอกสาร: เอกสารประกอบการเรียนนี้เป็นผลงานการเรียบเรียงของ อ.วิษณุ วงศ์ธรรมสิริ ซึ่งได้รับความคุ้มครองตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ ผู้ที่ต้องการเผยแพร่ส่วนหนึ่งส่วนใดของเอกสารนี้ หรือใช้เอกสารนี้ในการประกอบการสอน ต้องได้รับการยินยอมเป็นลายลักษณ์อักษรก่อนเท่านั้น

โปรดอ่านก่อนเรียน

เอกสารประกอบการเรียน วิชา คณิตศาสตร์ เรื่อง **ความเท่ากันทุกประการ ม.2** ฉบับนี้ได้คัดเนื้อหาและแบบฝึกหัดออกมาจากส่วนหนึ่งของเอกสารประกอบการเรียน เรื่อง **การเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต (FULL VERSION)** เพื่อปรับให้เหมาะสมกับพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 2 และสอดคล้องกับระยะเวลาที่ใช้ในการเรียนที่เหมาะสมกับภาคการศึกษา

ทั้งนี้ทั้งนั้น หากนักเรียนต้องการที่จะทำแบบฝึกหัดหรือแนวข้อสอบที่น่าสนใจและยากมากขึ้นกว่านี้ แนะนำให้ไปเรียนในหัวข้อ **การเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต (FULL VERSION)** นะครับ

การเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต

สารบัญ

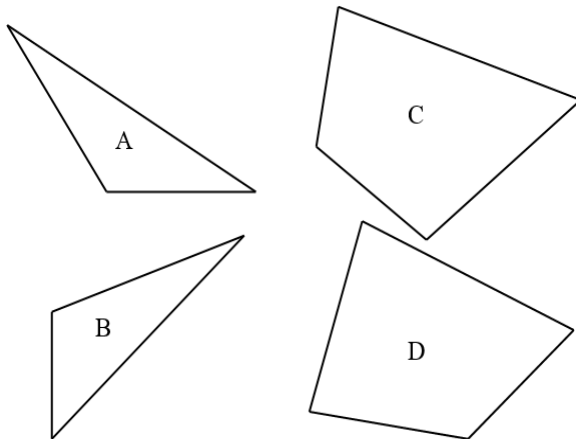
หัวข้อ	หน้า
เนื้อหา	1
แบบฝึกหัดที่ 1	9
แบบฝึกหัดที่ 2	14
แบบฝึกหัดที่ 3	33



ajnunnu.com

การเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต

พิจารณาจากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้



เมื่อสามารถเคลื่อนที่รูป A ไปทับได้สนิทกับรูป B และสามารถเคลื่อนที่รูป C ไปทับได้สนิทกับรูป D ได้สนิทโดยใช้กระดาษลอกกลายรูปหนึ่งแล้วนำไปทับกับอีกรูปหนึ่งได้สนิทแล้ว จะกล่าวได้ว่ารูปเรขาคณิตสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

บทนิยาม รูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ เคลื่อนที่รูปหนึ่งไปทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท

เราใช้สัญลักษณ์ \cong แทนคำว่า “เท่ากันทุกประการ”
จากรูปข้างต้น จะได้ว่า; รูป A \cong รูป B และ รูป C \cong รูป D

การเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรง

กำหนดให้ \overline{AB} และ \overline{CD} ยาวเส้นละ 4 หน่วย

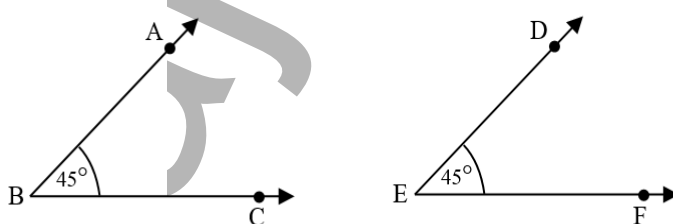


$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$

ส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ ส่วนของเส้นตรงสองเส้นนั้นยาวเท่ากัน

การเท่ากันทุกประการของมุม

กำหนดให้ $\angle ABC$ และ $\angle DEF$ มีขนาด 45°



$$\angle ABC \cong \angle DEF$$

มุมสองมุมเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ มุมทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน

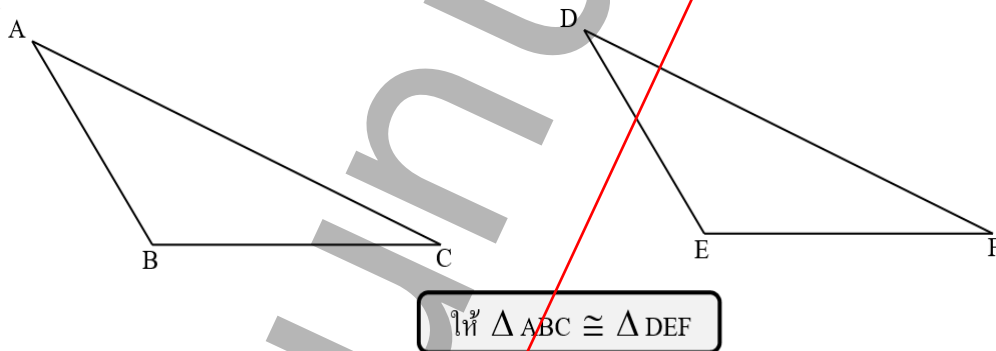
ข้อสังเกต

รูปที่เท่ากันทุกประการ

- 1) รูปวงกลมสองรูปที่มีความยาวของรัศมีเท่ากัน จะเท่ากันทุกประการ
- 2) รังสีสองรังสีใด ๆ เท่ากันทุกประการ
- 3) เส้นตรงสองเส้นใด ๆ เท่ากันทุกประการ
- 4) รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีด้านยาวเท่ากัน จะเท่ากันทุกประการ

รูปที่ไม่จำเป็นต้องเท่ากันทุกประการ

- 1) รูปสี่เหลี่ยมสองรูปที่มีความยาวรอบรูปเท่ากัน
- 2) รูปสี่เหลี่ยมสองรูปที่มีพื้นที่เท่ากัน
- 3) รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันสามคู่
- 4) รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความยาวรอบรูปเท่ากัน
- 5) รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีพื้นที่เท่ากัน
- 6) รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วสองรูปที่มีขนาดมุมยอดเท่ากัน

การเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

จากรูป ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม DEF แสดงว่า เมื่อเคลื่อนรูป $\triangle ABC$ ไปทับกับรูป $\triangle DEF$ แล้วจะทับกันได้สนิท โดยนำจุด A ทับจุด D, จุด B ทับจุด E, จุด C ทับจุด F ดังนั้น ด้านที่ยาวเท่ากัน, มุมที่มีขนาดเท่ากัน ลักษณะนี้เรียกว่า “สมนัยกัน” กล่าวได้ ดังนี้

\overline{AB} สมนัยกับ \overline{DE} , \overline{BC} สมนัยกับ \overline{EF} , \overline{AC} สมนัยกับ \overline{DF}

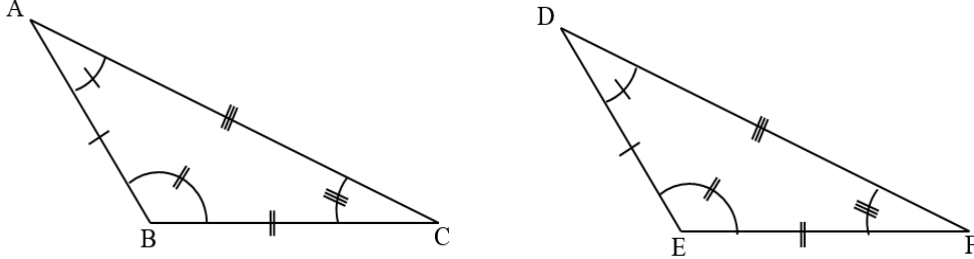
\hat{BAC} สมนัยกับ \hat{EDF} , \hat{ABC} สมนัยกับ \hat{DEF} , \hat{ACB} สมนัยกับ \hat{DFE}

เมื่อตรวจสอบความยาวของด้านคู่สมนัย จะได้ว่า; $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$

เมื่อตรวจสอบขนาดมุมคู่ที่สมนัย จะได้ว่า; $\hat{BAC} = \hat{EDF}$, $\hat{ABC} = \hat{DEF}$, $\hat{ACB} = \hat{DFE}$

สรุป “ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ แล้วด้านคู่ที่สมนัยกันและมุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมนั้นมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ”

ในทางกลับกัน เมื่อรูป $\triangle ABC$ และรูป $\triangle DEF$ มีด้านคู่ที่สมนัยยาวเท่ากัน คือ $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$ และมีมุมคู่ที่สมนัยกันขนาดเท่ากัน คือ $\angle BAC = \angle EDF$, $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle ACB = \angle DFE$ ตามรูป



จะได้; $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

สรุป “ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านคู่สมนัยกันและมุมคู่ที่สมนัยกัน แล้วรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ”

การเขียนสัญลักษณ์ แสดงว่า รูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม DEF

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

เขียนเรียงตามลำดับของมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน คือ

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{D} & , & & \hat{B} &= \hat{E} & , & & \hat{C} &= \hat{F} \\ \overline{AB} &= \overline{DE} & , & & \overline{BC} &= \overline{EF} & , & & \overline{AC} &= \overline{DF} \end{aligned}$$

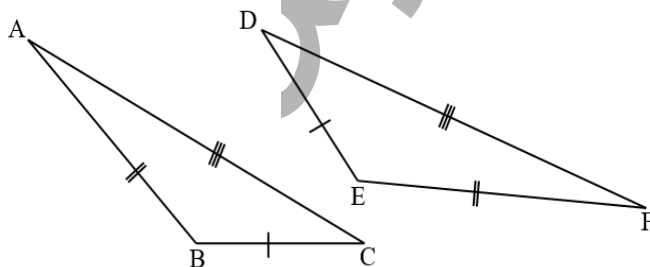
ความสัมพันธ์ที่เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ

ในการตรวจสอบว่าสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการหรือไม่ เราจะต้องทำการพิสูจน์ว่าทั้งสองรูปนั้นทับกันสนิทได้หรือไม่ แต่ยังมีวิธีการพิสูจน์การเท่ากันทุกประการของสามเหลี่ยมโดยไม่ต้องยกรูปไปทับได้อีกหลายวิธี ซึ่งจะแสดงเป็นความสัมพันธ์ต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมทั้งสองรูป ดังนี้

1. รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการด้วยความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน (ด.ด.ด.)

นิยาม ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใดๆ มีด้านเท่ากันสามคู่แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ

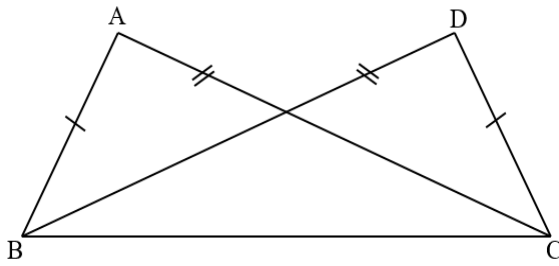
ตัวอย่าง $\triangle ABC \cong \triangle FED$ เพราะเหตุใด



- จาก
- 1) $\overline{AB} = \overline{FE}$ (กำหนดให้) ด
 - 2) $\overline{BC} = \overline{ED}$ (กำหนดให้) ด
 - 3) $\overline{AC} = \overline{FD}$ (กำหนดให้) ด

ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle FED$ เพราะ ด.ด.ด.

ตัวอย่าง จากรูป $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{AC} = \overline{DB}$ จงพิสูจน์ว่า $\angle BAC = \angle CDB$

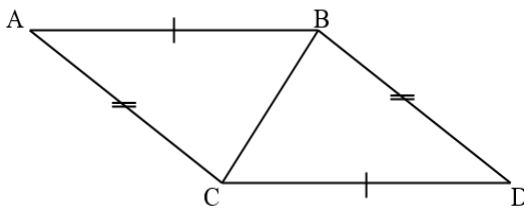


- จาก 1) $\overline{AB} = \overline{DC}$ (กำหนดให้) ด
 2) $\overline{AC} = \overline{DB}$ (กำหนดให้) ด
 3) \overline{BC} เป็นด้านร่วม ด

ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ เพราะ ค.ค.ค.

จะได้; $\angle BAC = \angle CDB$ เพราะเป็นมุมคู่สมนัยกัน

ตัวอย่าง จากรูป $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{AC} = \overline{DB}$ จงพิสูจน์ว่า $\angle BAC = \angle CDB$



- จาก 1) $\overline{AB} = \overline{DC}$ (กำหนดให้) ด
 2) $\overline{AC} = \overline{DB}$ (กำหนดให้) ด
 3) \overline{BC} เป็นด้านร่วม ด

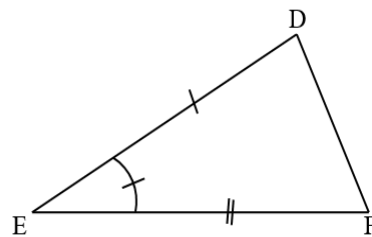
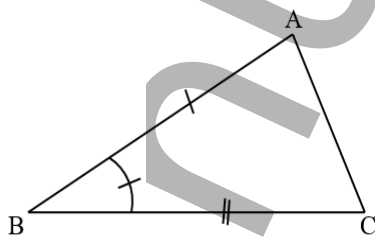
ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ เพราะ ค.ค.ค.

จะได้; $\angle BAC = \angle CDB$ เพราะเป็นมุมคู่สมนัยกัน

2. รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการด้วยความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน (ด.ม.ด.)

นิยาม ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมที่อยู่ระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ

ตัวอย่าง จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ เพราะเหตุใด



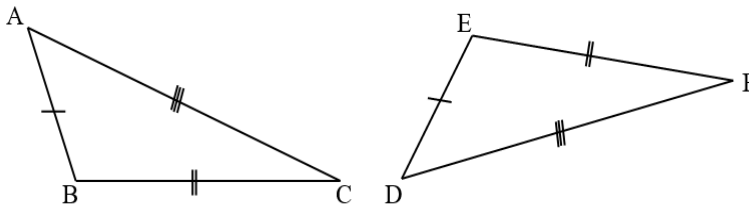
- จาก 1) $\overline{AB} = \overline{DE}$ (กำหนดให้) ด
 2) $\angle B = \angle E$ (กำหนดให้) ม
 3) $\overline{BC} = \overline{EF}$ (กำหนดให้) ด

ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ เพราะ ด.ม.ด.

หน้า 5 - 13
มีในเอกสารตัวเต็ม

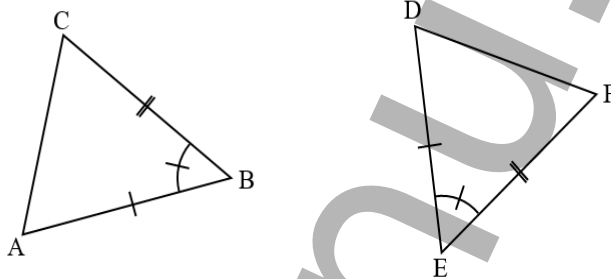
แบบฝึกหัดที่ 2

1) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ เพราะอะไร



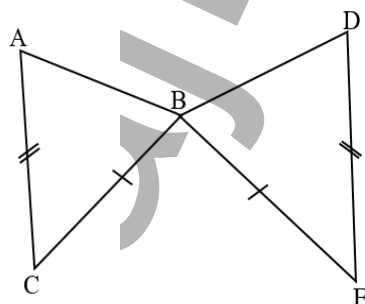
- ก. ค.ค.ค.
- ข. ม.ค.ม.
- ค. ค.ม.ค.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

2) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ เพราะอะไร



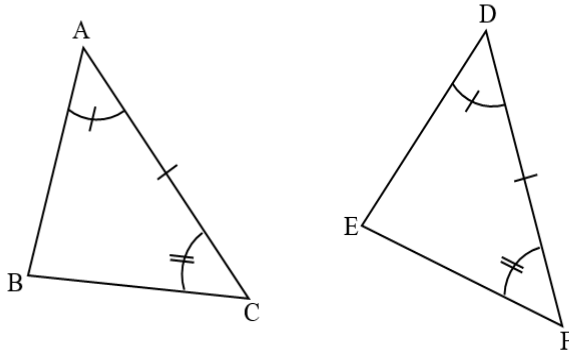
- ก. ม.ค.ม.
- ข. ค.ม.ค.
- ค. ม.ม.ค.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

3) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle DBE$ เพราะอะไร



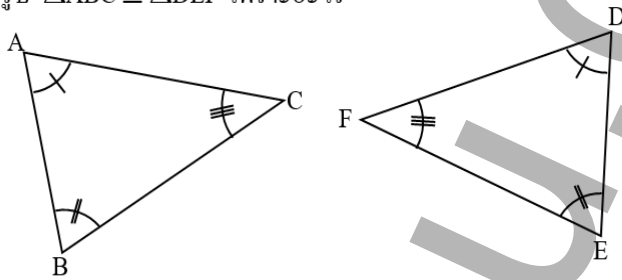
- ก. ค.ม.ค.
- ข. ม.ค.ม.
- ค. ม.ม.ค.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

4) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ เพราะอะไร



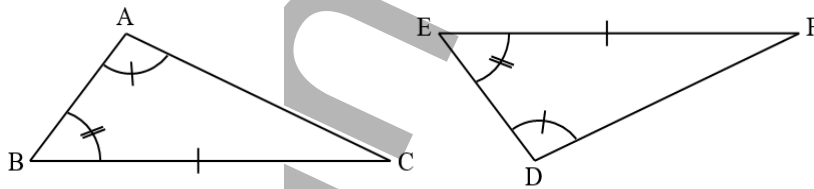
- ก. ค.ม.ด.
- ข. ม.ค.ม.
- ค. ม.ม.ค.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

5) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ เพราะอะไร



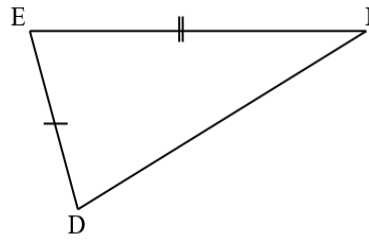
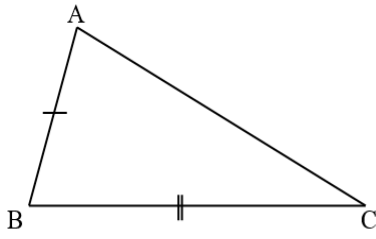
- ก. ค.ม.ด.
- ข. ม.ค.ม.
- ค. ม.ม.ค.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

6) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ เพราะอะไร



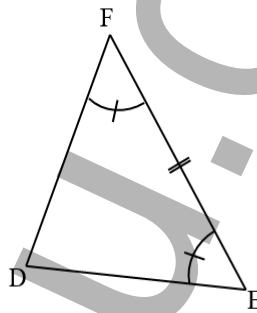
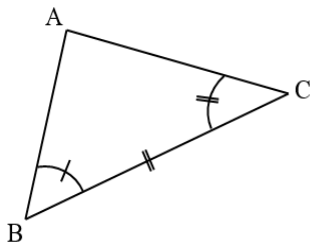
- ก. ค.ม.ด.
- ข. ม.ค.ม.
- ค. ม.ม.ค.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

7) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ เพราะอะไร



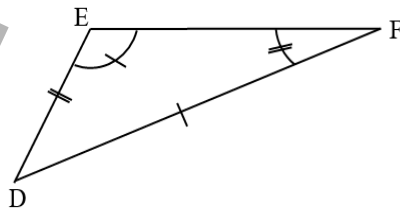
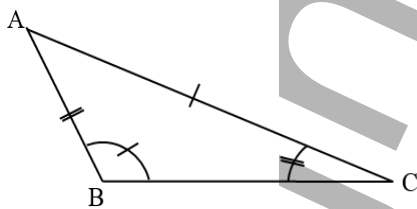
- ก. ค.ม.ค.
- ข. ม.ม.ค.
- ค. ม.ค.ม.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

8) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ เพราะอะไร



- ก. ค.ม.ค.
- ข. ม.ค.ม.
- ค. ม.ม.ค.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

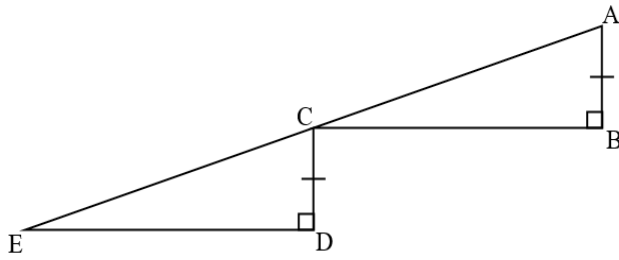
9) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ เพราะอะไร



- ก. ม.ค.ม.
- ข. ค.ม.ค.
- ค. ม.ม.ค.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

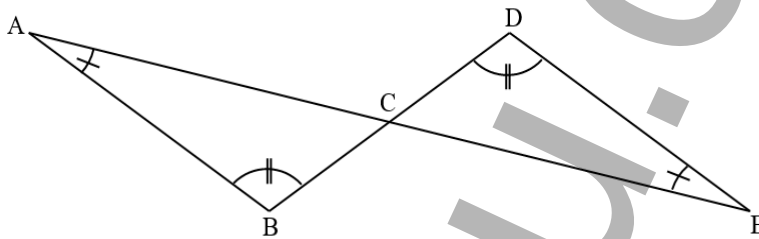
หน้า 17 - 19
มีในเอกสารตัวเต็ม

19) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle CDE$ เพราะเหตุใด เมื่อจุด C เป็นจุดกึ่งกลางของ AE



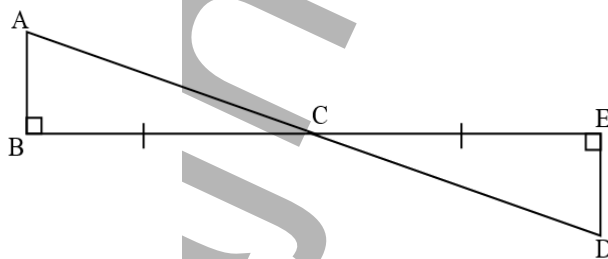
- ก. ค.ม.ค.
- ข. ฉ.ค.ค.
- ค. ม.ค.ม.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

20) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle EDC$ เพราะเหตุใด



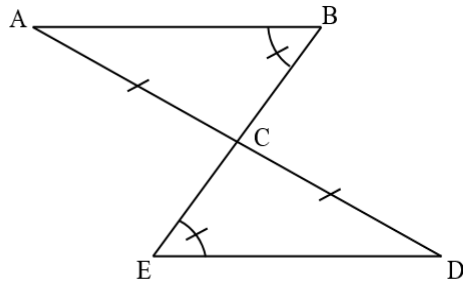
- ก. ค.ม.ค.
- ข. ม.ค.ม.
- ค. ม.ม.ม.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

21) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle DEC$ เพราะเหตุใด



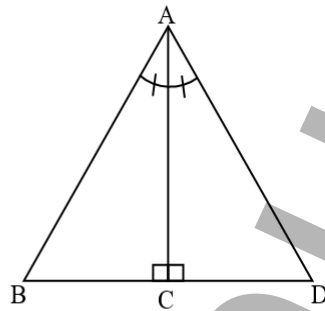
- ก. ค.ม.ค.
- ข. ฉ.ค.ค.
- ค. ม.ค.ม.
- ง. ม.ม.ค.

22) จากรูป $\triangle ACB \cong \triangle DCE$ เพราะเหตุใด



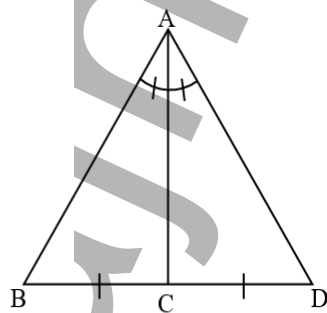
- ก. ม.ม.ด.
- ข. ด.ม.ด.
- ค. ค.ค.ค.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

23) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ เพราะเหตุใด



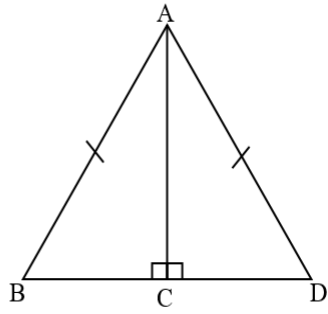
- ก. ด.ม.ด.
- ข. ม.ค.ม.
- ค. น.ค.ค.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

24) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ เพราะเหตุใด



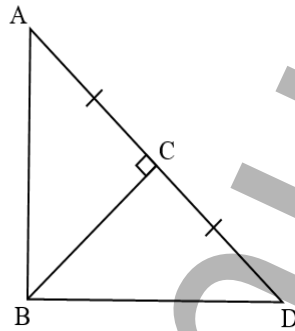
- ก. ม.ค.ม.
- ข. ด.ม.ด.
- ค. ม.ค.ค.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

25) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ เพราะเหตุใด



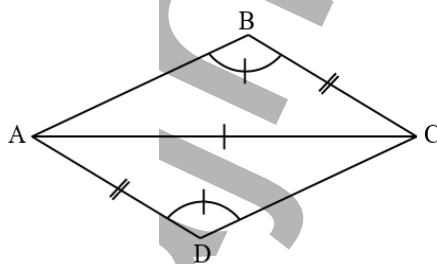
- ก. ค.ม.ค.
- ข. ม.ค.ม.
- ค. ฉ.ค.ค.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

26) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle DBC$ เพราะเหตุใด



- ก. ค.ม.ค.
- ข. ฉ.ค.ค.
- ค. ค.ค.ค.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

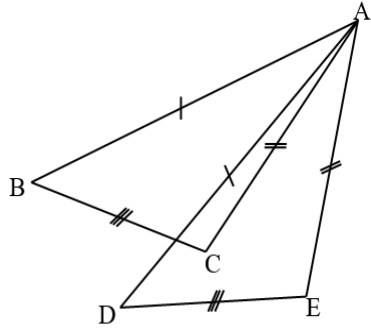
27) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ เพราะเหตุใด



- ก. ค.ม.ค.
- ข. ม.ค.ม.
- ค. ม.ค.ค.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

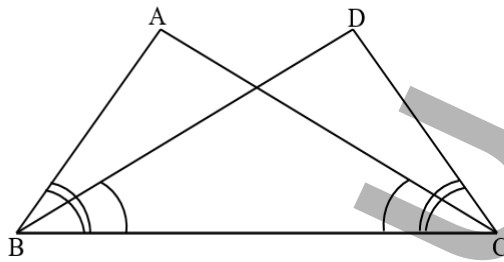
หน้า 23 - 25
มีในเอกสารตัวเต็ม

37) จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} = \overline{AD}$, $\overline{AC} = \overline{AE}$, $\overline{BC} = \overline{DE}$ แล้ว $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ เพราะเหตุใด



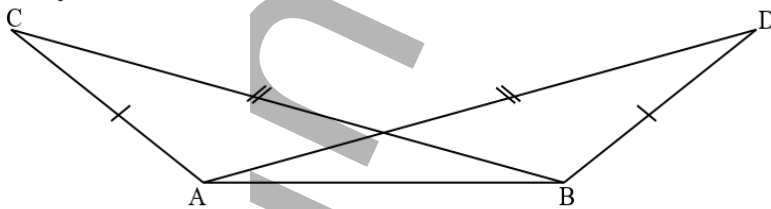
- ก. ค.ค.ค.
- ข. ค.ม.ค.
- ค. ม.ค.ม.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

38) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ เพราะอะไร



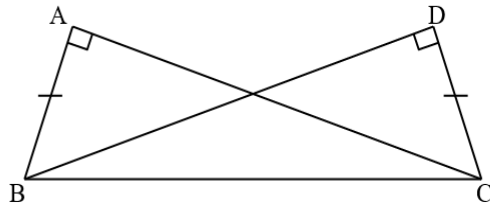
- ก. ค.ม.ค.
- ข. ม.ค.ม.
- ค. ม.ม.ค.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

39) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ เพราะอะไร เมื่อกำหนดให้ $\overline{AC} = \overline{BD}$ และ $\overline{BC} = \overline{AD}$



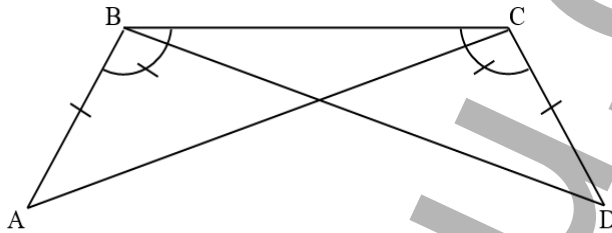
- ก. ค.ค.ค.
- ข. ม.ค.ม.
- ค. ม.ม.ค.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

40) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ เพราะเหตุใด



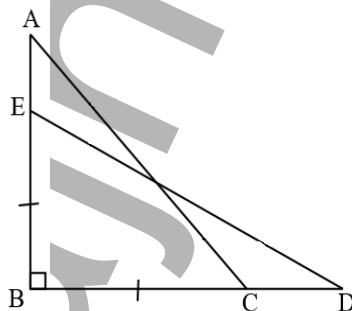
- ก. ค.ด.ด.
- ข. ค.ม.ด.
- ค. ฉ.ด.ด.
- ง. ม.ม.ด.

41) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ เพราะอะไร



- ก. ค.ม.ด.
- ข. ม.ค.ม.
- ค. ม.ม.ด.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

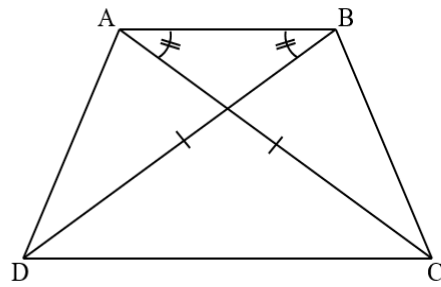
42) จากรูป $\angle ABD = 90^\circ$, มี $\overline{BE} = \overline{BC}$, $\overline{AC} = \overline{DE}$ จะทำให้ $\triangle ABC \cong \triangle DBE$ เพราะอะไร



- ก. ค.ม.ด.
- ข. ม.ค.ม.
- ค. ฉ.ด.ด.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

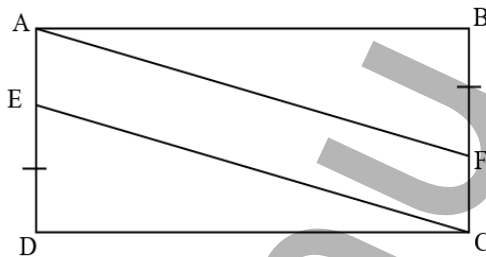
หน้า 28 - 29
มีในเอกสารตัวเต็ม

49) จากรูป กำหนดให้ $\overline{AC} = \overline{BD}$, $\angle CAB = \angle DBA$ แล้ว $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ เพราะเหตุใด



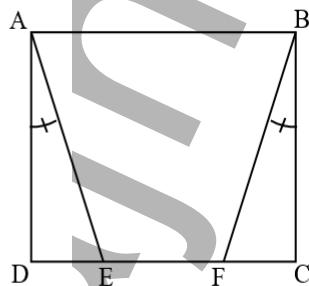
- ก. ม.ค.ม.
- ข. ม.ม.ค.
- ค. ค.ม.ค.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

50) ให้ ABCD เป็น \square สี่เหลี่ยม มี $\overline{DE} = \overline{BF}$ แล้ว $\triangle ABF \cong \triangle CDE$ เพราะเหตุใด



- ก. ค.ค.ค.
- ข. จ.ค.ค.
- ค. ม.ค.ม.
- ง. ค.ม.ค.

51) ให้ ABCD เป็น \square จัตุรัส มี $\angle DAE = \angle CBF$ แล้ว $\triangle ADE \cong \triangle BCF$ เพราะเหตุใด

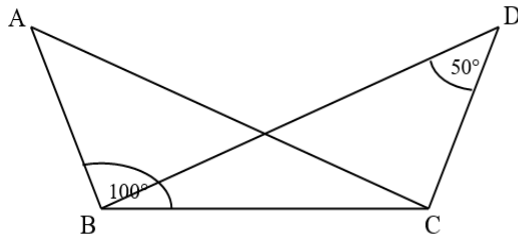


- ก. ม.ค.ม.
- ข. ค.ค.ค.
- ค. ม.ม.ค.
- ง. ไม่เท่ากันทุกประการ

หน้า 31 - 32
มีในเอกสารตัวเต็ม

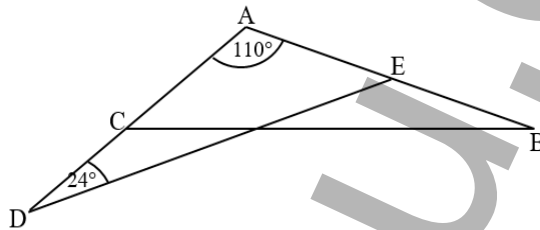
แบบฝึกหัดที่ 3

1) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ จงหาค่าของ $\angle BDC$ มีขนาดเท่าไร



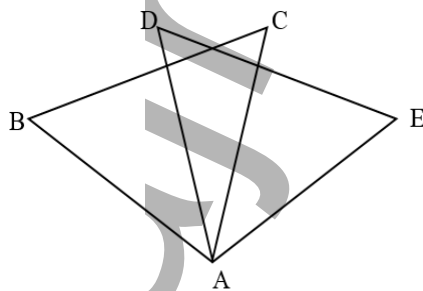
- ก. 20°
- ข. 25°
- ค. 30°
- ง. 35°

2) จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ จงหาขนาดของ $\angle B + \angle E$



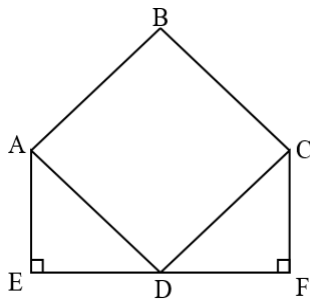
- ก. 64°
- ข. 70°
- ค. 72°
- ง. 82°

3) จากรูป $\overline{AB} = \overline{AD}$, $\overline{BC} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{AE}$ ถ้า $\angle BAC = 72^\circ$ และ $\angle DAC = 32^\circ$ จงหาขนาดของ $\angle CAE$ มีขนาดเท่าไร



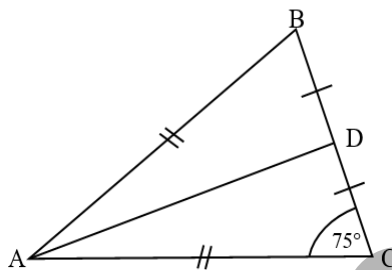
- ก. 40°
- ข. 44°
- ค. 48°
- ง. 50°

- 4) จากรูป กำหนดให้ $ABCD$ เป็น \square จัตุรัส, D เป็นจุดกึ่งกลางของ \overline{EF} จงหาขนาดของ $\angle CDF$ ทางกึ่งศา



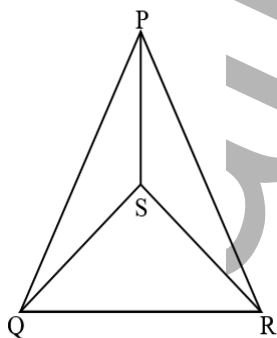
- ก. 45°
ข. 40°
ค. 35°
ง. 30°

- 5) จากรูป จงหาขนาดของ $\angle BAD$ ทางกึ่งศา



- ก. 12°
ข. 15°
ค. 18°
ง. 20°

- 6) จากรูป $\triangle PQR$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี P เป็นมุมยอด, $\triangle SQR$ เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า แล้วจงหาขนาดของ $\angle PSR$ ทางกึ่งศา



- ก. 142°
ข. 148°
ค. 150°
ง. 154°

หน้า 35 - 38
มีในเอกสารตัวเต็ม