

กนก

เอกสารประกอบการเรียน
วิชา คณิตศาสตร์

Perfect Square Trinomials (PST)

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)(a-b) = (a-b)^2$$

พหุนาม Part 4 of 4

Difference of Two Squares (DOTS)

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

ตัวอย่าง

เอกสารตัวเต็มจะไม่มีลายน้ำ

การหารพหุคูณ

การหารพหุคูณด้วยเอกนาม

การหารพหุคูณด้วยเอกนามหน้า 159

แบบฝึกหัดที่ 11.1

ตอนที่ 1หน้า 164	ตอนที่ 5หน้า 175
ตอนที่ 2หน้า 167	ตอนที่ 6หน้า 178
ตอนที่ 3หน้า 170	ตอนที่ 7หน้า 179
ตอนที่ 4หน้า 173	

การหารพหุคูณด้วยพหุคูณ

วิธีที่ 1 การหารพหุคูณด้วยพหุคูณด้วยการหารยาวหน้า 181

แบบฝึกหัดที่ 11.2

ตอนที่ 1หน้า 187	ตอนที่ 7หน้า 208
ตอนที่ 2หน้า 190	ตอนที่ 8หน้า 214
ตอนที่ 3หน้า 192	ตอนที่ 9หน้า 221
ตอนที่ 4หน้า 194	ตอนที่ 10หน้า 223
ตอนที่ 5หน้า 200	ตอนที่ 11หน้า 228
ตอนที่ 6หน้า 202	

วิธีที่ 2 การหารพหุคูณด้วยพหุคูณด้วยการหารสังเคราะห์หน้า 232

กรณีที่ 1 พหุคูณตัวหาร $ax + b$ มีค่า $a = 1$ หน้า 234

แบบฝึกหัดที่ 11.3

ตอนที่ 1หน้า 237	ตอนที่ 4หน้า 246
ตอนที่ 2หน้า 239	ตอนที่ 5หน้า 249
ตอนที่ 3หน้า 242	ตอนที่ 6หน้า 253

กรณีที่ 2 พหุคูณตัวหาร $ax + b$ มีค่า $a \neq 1$ หน้า 259

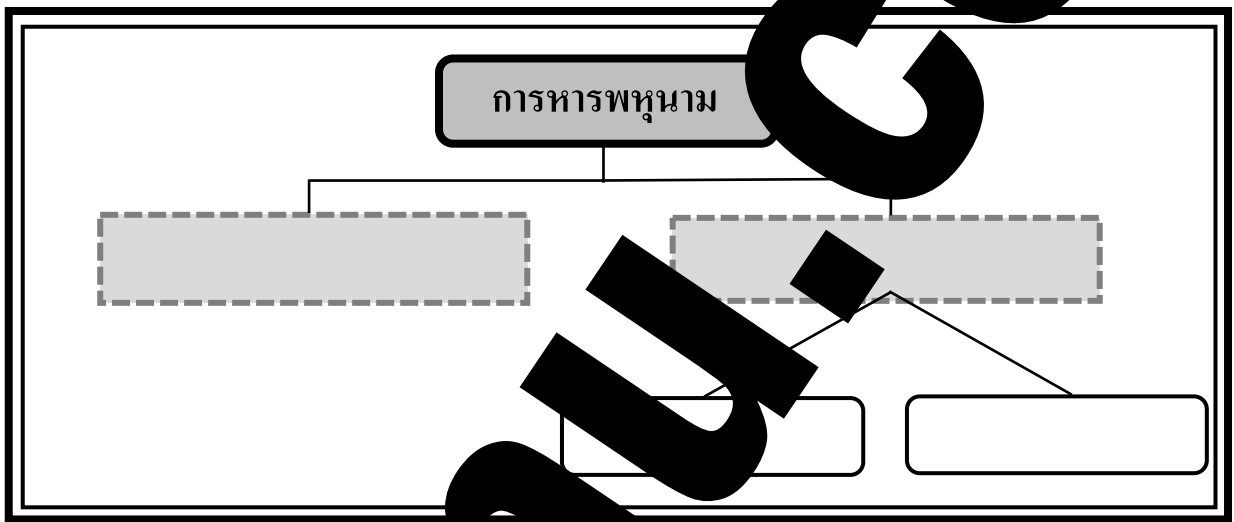
แบบฝึกหัดที่ 11.4

ตอนที่ 1หน้า 262	ตอนที่ 3หน้า 268
ตอนที่ 2หน้า 265	ตอนที่ 4หน้า 273

การหารพหุนาม

สำหรับหัวข้อนี้เราจะทำการศึกษาเรื่องการหารของพหุนามซึ่งพื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการหารหัวข้อนี้คือ การหารของเอกนามกับเอกนาม ซึ่งได้ทำการศึกษามาแล้วก่อนหน้านี้

***** ดังนั้น ผู้เรียนที่ยังไม่เข้าใจหรือยังไม่มีความรู้ในเรื่องการหารของเอกนามกับเอกนามนั้น ต้องย้อนกลับไป!!!!!! ทำความเข้าใจในหัวข้อการหารของเอกนามกับเอกนามเสียก่อน มิฉะนั้น !!! จะไม่สามารถทำการศึกษาเรื่องการหารของพหุนามที่เรานำเสนอนี้ไปได้อย่างเข้าใจ *****



การหารพหุนามด้วยเอกนาม

- ข้อตกลงและวิธีการหารพหุนามด้วยเอกนาม

1. เมื่อกำหนดให้ A เป็นพหุนามที่เป็นตัวหาร และ B เป็นเอกนามที่เป็นตัวหาร โดยที่ $B \neq 0$

เช่น

$(x^2 - 10) \div (2)$ เขียนอยู่ในรูปเศษส่วนได้ว่า	
$(9y^3 + 12xy) \div (-3y)$ เขียนอยู่ในรูปเศษส่วนได้ว่า	
$(x^2 + 9xy^2 - 16xy) \div (-5xy)$ เขียนอยู่ในรูปเศษส่วนได้ว่า	

นิยามเขียนพหุนามที่เป็นตัวตั้งโดยการเรียงดีกรีของพหุนาม เช่น

1. $(-18 + 12x^2 - 4x^4 + 6x^3) \div (2)$

เขียนอยู่ในรูปเศษส่วนได้ว่า

2. $(9x^3y - 12x^4y^2 + xy + 6xy^2) \div (-3xy)$

เขียนอยู่ในรูปเศษส่วนได้ว่า

2. เมื่อเขียนรูปการหารพหุนามด้วยเอกนามในรูปเศษส่วนแล้วให้ใช้หลักการแยกเศษส่วน (แยกส่วน) เข้ามาแยกเป็นเศษส่วนย่อยๆ ซึ่งจะอยู่ในรูปของเอกนามหารด้วยเอกนาม

หลักการแยกส่วนของการบวกลบเศษส่วน

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d} = \frac{a+b-c}{d}$$

ในทางกลับกัน

เช่น

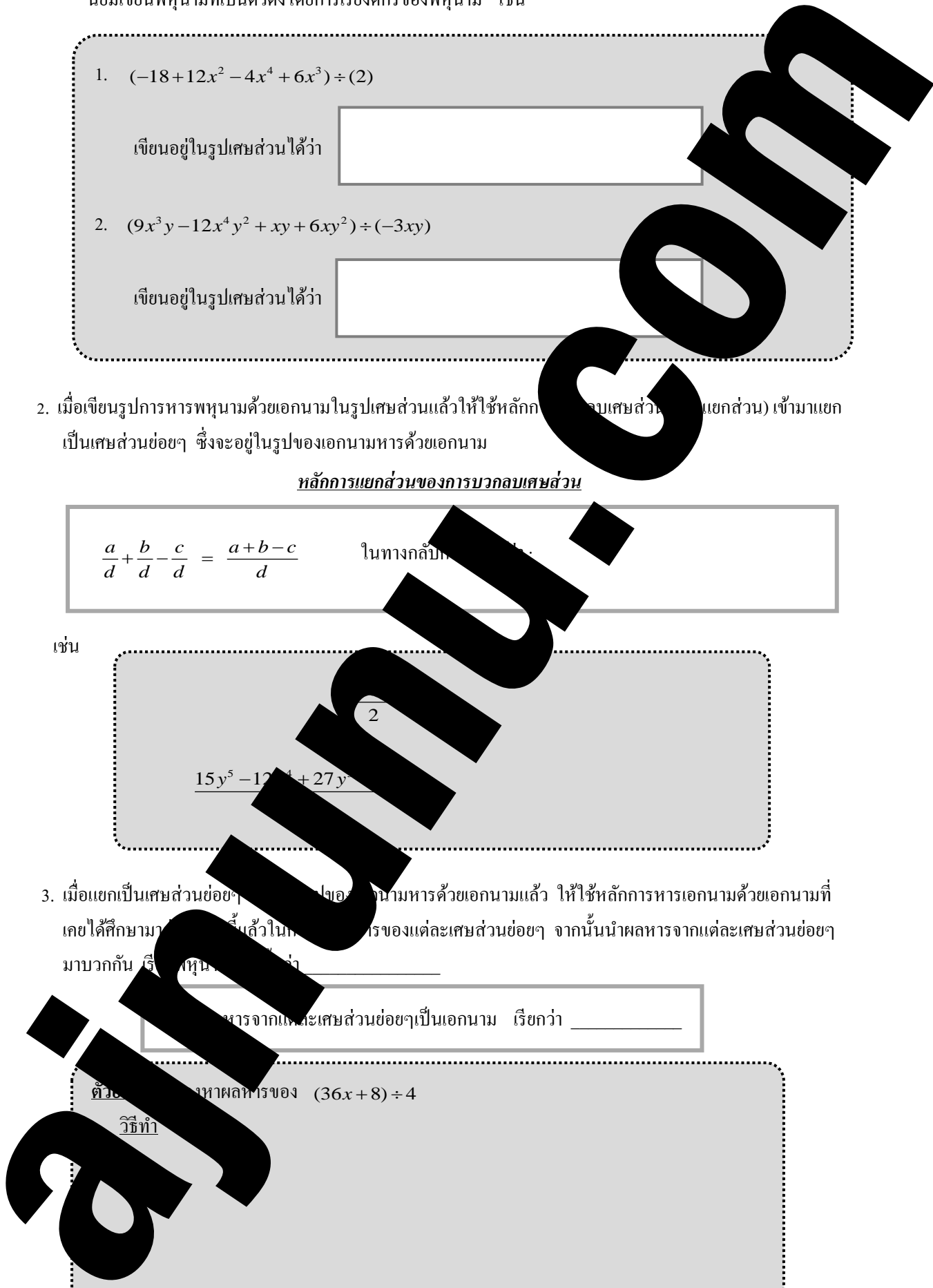
$$\frac{15y^5 - 12y^4 + 27y^3}{2}$$

3. เมื่อแยกเป็นเศษส่วนย่อยๆ ไปของพหุนามหารด้วยเอกนามแล้ว ให้ใช้หลักการหารเอกนามด้วยเอกนามที่ได้ศึกษามาแล้วขึ้นไว้ในบทเรียนของแต่ละเศษส่วนย่อยๆ จากนั้นนำผลหารจากแต่ละเศษส่วนย่อยๆ มาบวกกัน เรียกว่าพหุนาม

ผลหารจากแต่ละเศษส่วนย่อยๆ เป็นเอกนาม เรียกว่า _____

ตัวอย่าง ผลหารของ $(36x + 8) \div 4$

วิธีทำ



หน้า 161 -163
มีในเอกสารตัวเต็ม

แบบฝึกหัดที่ 11.1

ตอนที่ 1

จงหาผลหารของพหุนามกับเอกนามที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $(4x+10) \div (2)$

2) $(24y-30) \div (3)$

3) $(-12z-48) \div (-4)$

4) $(-15m+15) \div (15)$

5) $(7s-2) \div 14$

7) $(-48a^2+60) \div 6$

8) $(75b^5-12) \div 3$

9) $(8mn+1) \div 8$

10) $(-7a^2b-14) \div (-7)$

11) $(-45b+9c) \div 9$

12) $(3c^2-28d^2) \div 4$

13) $(-xy^4 + 15z^3) \div 5$

14) $(2pq - r) \div 5$

15) $(13gh - 6k) \div 1$

16) $(-36stu + 18) \div 45$

17) $(15k + 75) \div (-3)$

18) $(28m - 14) \div 7$

19) $(-65y^2 + 55) \div (-5)$

20) $(-48) \div (-6)$

21) $(12ef + 108) \div (-12)$

22) $(-15y^4 - 30) \div (-15)$

23) $(-100d + 25e) \div (-25)$

24) $(7w^4 - 39s^5) \div (-13)$

หน้า 166 -180
มีในเอกสารตัวเต็ม

การหารพหุนามด้วยพหุนาม

วิธีที่ 1 การหารพหุนามด้วยพหุนามด้วยวิธีตั้งหารยาว

● ข้อตกลงและวิธีการหารพหุนามด้วยพหุนามด้วยวิธีตั้งหารยาว

- การหารพหุนามด้วยพหุนามที่จะกล่าวต่อไปนี้จะกล่าวเฉพาะกรณีที่พหุนามตัวตั้งและพหุนามตัวหารเป็นพหุนามที่มีตัวแปรเดียวกันและเป็นตัวแปรเดียวกันโดยที่ดีกรีของพหุนามตัวหารน้อยกว่าหรือเท่ากับดีกรีของพหุนามตัวตั้ง

ตัวอย่างกรณีที่จะทำการศึกษา

- $(4x^2 + 8x - 10) \div (x + 2)$
- $(10y^2 - 16y + 20) \div (y^2 - 4y + 3)$
- $(-15m^5 + 5m^3 - 10m + 16) \div (m^3 - 2m + 2)$

ตัวอย่างที่ไม่อยู่ในกรณีที่จะทำการศึกษา

- $(10x - 6) \div (x^2 + 2x - 1)$
- $(4y^2 + 12y - 1) \div (y^3 + 3)$
- $(-36x^2 + 9xy^2 - 1) \div (2xy + 3)$

- เขียนพหุนามตัวตั้งและพหุนามตัวหารในรูปแบบหารยาว โดยที่ทั้งพหุนามตัวตั้งและพหุนามตัวหารนั้นต้องอยู่ในรูปของพหุนามที่เรียงดีกรี (เลขชี้กำลังของตัวแปร) จากมากไปน้อยด้วย เช่น

พหุนาม ÷ พหุนาม	รูปการหารยาว
$(12x^2 + 8x - 36) \div (x + 4)$	
$(25x^4 - 12x^3 - 10x^2 + 15x - 40) \div (x^2 - 1)$	
$(-12x - 9 + 5x^2) \div (x^2 - 1)$	
$(-14x - 8x^4 - 10x^2 + 5 - 1) \div (7x - 5 + 2x^2)$	

- ในกรณีที่เรียงดีกรี (เลขชี้กำลังของตัวแปร) ของทั้งพหุนามตัวตั้งและพหุนามตัวหารจากมากไปน้อย แล้วปรากฏว่าไม่มีพจน์ที่มีดีกรีต่ำกว่าพหุนามตัวหาร ให้สร้างพจน์นั้นเพิ่มขึ้นมาโดยให้สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่สร้างขึ้นมานั้นเป็นศูนย์ เช่น

พหุนาม ÷ พหุนาม	รูปการหารยาว
$(12x^2 + 8x - 36) \div (x - 3)$	
$(25x^4 - 12x^3 - 10x^2 + 15x - 40) \div (x^2 - 1)$	
$(-12x - 9 + 5x^2) \div (-7 + 2x^2)$	

3. เมื่อเขียนรูปการหารยาวตามข้อ 2 แล้ว ขอให้สังเกตการหารจากตัวอย่างที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลหารของ $(x^2 - 5x - 36) \div (x + 4)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลหารของ $(-2y - 40) \div (-2y - 40 + 1)$

วิธีทำ

ajnunu.com

หน้า 183 -186
มีในเอกสารตัวเต็ม

แบบฝึกหัดที่ 11.2

ตอนที่ 1

จงหาผลหารของพหุนามด้วยพหุนามที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $(x^2 + 8x + 15) \div (x + 5)$

2) $(y^2 + 8y - 48) \div (y + 12)$

3) $(a^2 - 20a + 75) \div (a - 5)$

4) $(b^2 + 7b + 12) \div (b + 3)$

5) $(7c^2 - 66c + 9) \div (c - 9)$

6) $(14m + m^2 + 52) \div (m + 5)$

7) $(p^2 - 79 + 3p) \div (p - 7)$

8) $(12z + 27 + z^2) \div (-3 - z)$

9) $(75 - 20x + x^2) \div (5 - x)$

10) $(-n^2 + 24n)$

11) $(-y^2 - 17y - 16)$

12) $(-s^2 - 12s - 27) \div (s + 3)$

หน้า 189 -231
มีในเอกสารตัวเต็ม

วิธีที่ 2 การหารพหุนามด้วยพหุนามด้วยวิธีการหารสังเคราะห์

การหารสังเคราะห์ที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นวิธีการหาผลหารของการหารพหุนามด้วยพหุนามที่ตัวเอกและรวดเร็วโดยไม่ต้องใช้วิธีการตั้งหารยาวเหมือนที่เคยศึกษามาก่อนหน้านี้ และยังถือว่าเป็นพื้นฐานของวิธีการสำคัญที่จะต้องใช้ในการศึกษาเรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามที่จะต้องศึกษาในลำดับต่อไป จึงอยากให้ผู้เรียนตั้งใจศึกษาและทำความเข้าใจให้เป็นอย่างดีสำหรับหัวข้อนี้

● ข้อตกลงก่อนการศึกษาการหารพหุนามด้วยพหุนามด้วยวิธีการหารสังเคราะห์

1. ในการหารสังเคราะห์นั้น!!!!!!!

พหุนามที่เป็นตัวตั้ง เป็นพหุนามที่มีตัวแปรเดียวโดยที่พหุนามตัวหารจะน้อยกว่าหรือเท่ากับหนึ่ง

พหุนามที่เป็นตัวหาร เป็นพหุนามที่มีตัวแปรเดียวกำลังหนึ่งเป็นต้นไป และตัวแปรเดียวกันกับตัวแปรของพหุนามตัวตั้ง โดยที่พหุนามตัวหารนั้นอยู่ในรูป $ax + b$ เมื่อ a, b ใด ๆ ก็ตาม แต่ $a \neq 0$ และ x แทนตัวแปร

พิจารณาโจทย์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ว่าใช้วิธีการหารสังเคราะห์ได้หรือไม่

โจทย์พหุนามหารพหุนาม	ใช้วิธีการหารสังเคราะห์	
	ได้	ไม่ได้
$(4x^2 + 12x + 9) \div (2x + 3)$		
$(5y^2 + 14y + 8) \div (2y + 3)$		
$(m^3 + m^2 + m - 10) \div (m - 4)$		
$(-4a^2 + 12a - 9) \div (a - 4)$		
$(12x^3 + 15xy^2 - 15y^3) \div (xy - 4)$		
$(n^3 + n^2 - n + 10) \div (n^2 - 2n - 4)$		
$(-15x^4 + 13x^2 - 9) \div (x - 12)$		
$(-p^6 - 4p + 12p^2 - 9) \div (3p - 1)$		
$(5c^5 - 9c^4 + 6c^3 - 9c^2 + 5c - 14) \div (p^2 - 1)$		
$(-4b^3 + 14 - 7b^2 + 6b) \div (-b + 5)$		

2. ถ้าโจทย์ที่กำหนดให้นั้นพหุนามตัวตั้ง ไม่ได้อยู่ในรูปที่เรียงดีกรี(เลขชี้กำลังของตัวแปร) ให้เขียนพหุนามตัวตั้งให้อยู่ในรูปของพหุนามที่เรียงดีกรี(เลขชี้กำลังของตัวแปร)จากมากไปน้อย

ในกรณีที่เรียงดีกรีของพหุนามตัวตั้งจากมากไปน้อยแล้ว ปรากฏว่าไม่มีพจน์ที่มีดีกรีต่ำกว่าพจน์ที่มีดีกรีสูงกว่า ให้สร้างพจน์นั้นเพิ่มขึ้นมาโดยให้สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่สร้างขึ้นมานั้นเป็นศูนย์

ส่วนพหุนามตัวหารนั้นต้องเขียนให้อยู่ในรูปที่พจน์หน้าเป็นพจน์ที่มีตัวแปรและพจน์หลังเป็นค่าคงที่

เช่น

1) $(75 - 20x + x^2) \div (x - 5)$

เขียนรูปใหม่ได้ว่า _____

2) $(6u - u^2 + 95) \div (-7 - u)$

เขียนรูปใหม่ได้ว่า _____

3) $(76 - 63v^2 - 2v) \div (-8 - 7v)$

เขียนรูปใหม่ได้ว่า _____

4) $(16h - 17h^2 - 14h^3 + 16) \div (-5 + h)$

เขียนรูปใหม่ได้ว่า _____

5) $(x^2 - 25) \div (x + 5)$

เขียนรูปใหม่ได้ว่า _____

6) $(15g^3 - 60 - 30g) \div (-5 - 3g)$

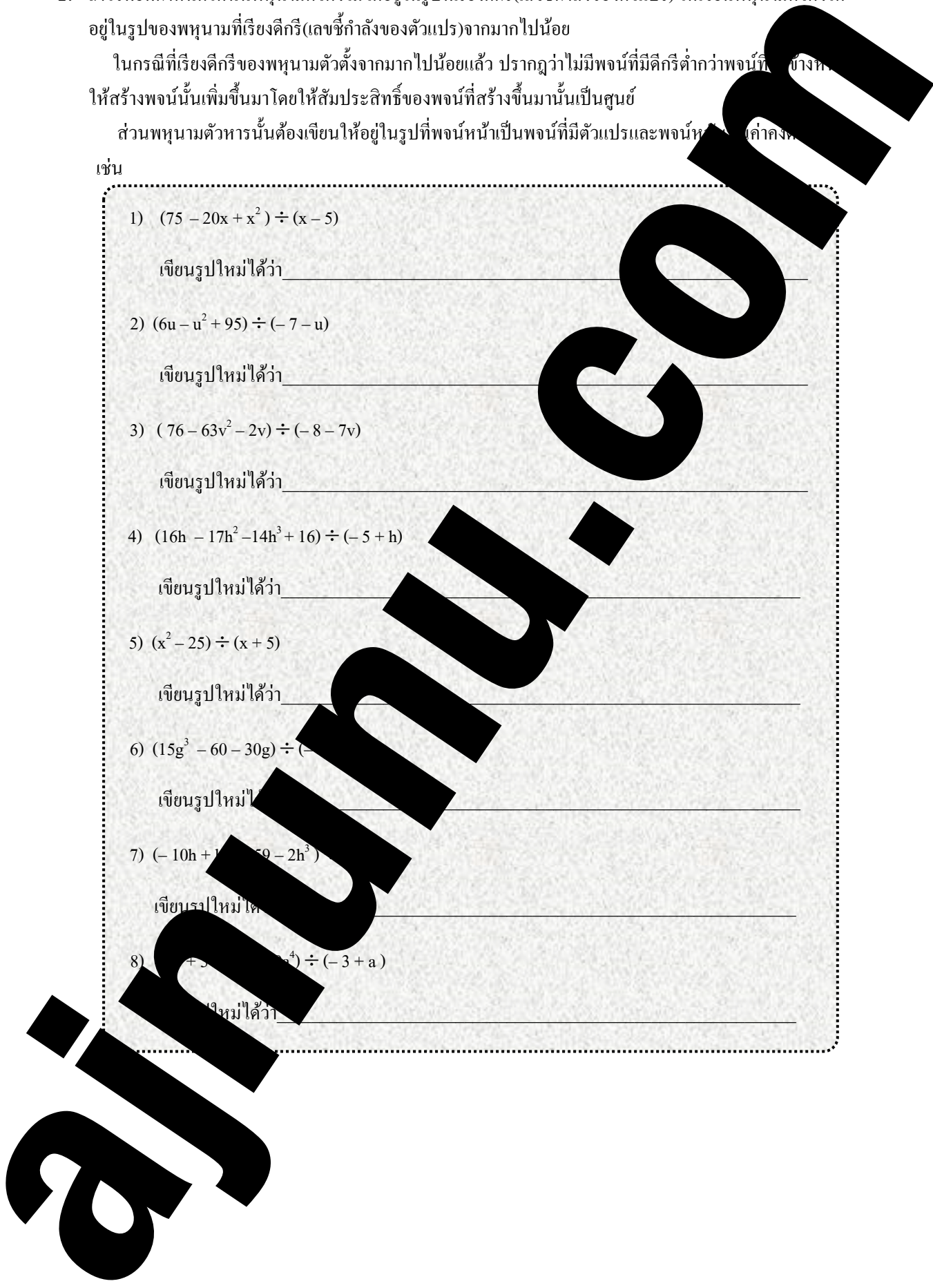
เขียนรูปใหม่ได้ว่า _____

7) $(-10h + 15 - 59 - 2h^3) \div (-5 - 3h)$

เขียนรูปใหม่ได้ว่า _____

8) $(5 + 3a^2 - 4a^4) \div (-3 + a)$

เขียนรูปใหม่ได้ว่า _____



วิธีการหารสังเคราะห์

กรณีที่ 1 พหุนามตัวหาร $ax + b$ มีค่า $a = 1$

ขอให้สังเกตการหารจากตัวอย่างที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 $(x^2 - 2x - 35) \div (x - 7)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 $(m^2 + m - 67) \div (m + 9)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 3 $(-5a^2) \div (a - 5)$

วิธีทำ

หน้า 235 -236
มีในเอกสารตัวเต็ม

แบบฝึกหัดที่ 11.3

ตอนที่ 1

จงหาผลหารของพหุนามด้วยพหุนามที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $(x^2 + 8x + 15) \div (x + 5)$

2) $(y^2 - 7y - 60) \div (y - 12)$

3) $(a^2 - 20a + 77) \div (a - 5)$

4) $(b^2 - 3b - 18) \div (b + 6)$

5) $(y - y^2 + 12) \div (y - 4)$

6) $(-n^2 + 24n - 80) \div (n - 4)$

7) $(-s^2 - 5s - 6) \div (3 + s)$

8) $(-82 - w^2 + 24w) \div (-5 + w)$

หน้า 238 -258
มีในเอกสารตัวเต็ม

กรณีที่ 2 พหุนามตัวหาร $ax + b$ มีค่า $a \neq 1$

ขอให้สังเกตการหารจากตัวอย่างที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 $(x^2 + 10x + 21) \div (-x - 3)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 $(5y^2 - 28y + 20) \div (-y + 5)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 3 $(4m^2 + 7) \div (-m - 2)$

วิธีทำ

ajnunu.com

หน้า 260 -261
มีในเอกสารตัวเต็ม

แบบฝึกหัดที่ 11.4

ตอนที่ 1

จงหาผลหารของพหุนามด้วยพหุนามที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $(x^2 + 8x + 15) \div (-x - 5)$

2) $(y^2 - 20y + 75) \div (-y + 5)$

3) $(95 + 6m - m^2) \div (-7 - m)$

4) $(-18b - 35 - b^2) \div (-b + 5)$

5) $(-55 - 17a - a^2) \div (-a - 11)$

6) $(-147c - 10c^2 + 60) \div (-15 - c)$

หน้า 263 -274
มีในเอกสารตัวเต็ม