

กนก

เอกสารประกอบการเรียน
วิชา คณิตศาสตร์

$$2x^2 + 6x$$

$$(5m - 1)^2 + 120(5m - 1) + 3600$$

$$-2880 - 20v^2 - 600v$$

Perfect Square Trinomials (PST)

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)(a-b) = (a-b)^2$$

$$(2\sqrt{10}m)^2 - 2880 - 600v$$

$$\frac{1}{63} - \frac{784s}{45}$$

$$-\frac{144x^2}{49} + \frac{18xy}{7} - \frac{9y^2}{16}$$

$$36(x-2y-1)^2 - 2880 - (4\sqrt{7}n)^2$$

$$20x^2 + 840x + 1600$$

พหุนาม Part 3 of 4

$$20x^2 + 840x + 1600$$

$$\frac{7d^2}{361}$$

$$256(m+3)^2 - 400$$

$$5m^2 + 6m + 1$$

$$\frac{5c^2}{729} - \frac{7d^2}{361}$$

Difference of Two Squares (DOTS)

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$7u^2v(p^2 - 5q^2) - 7uv^2(p^2 - 5q^2)$$

$$2x^2 + 6x$$

$$12x^3yz^2 - 15xy^3z^2 + 6x^2yz^3$$

$$\frac{5c^2}{729} - \frac{7d^2}{361}$$

$$20x^2 + 840x + 1600$$

$$28x^2$$

$$20x^2 + 840x + 1600$$

$$-2880 - 20v^2 - 600v$$

$$168p^2 + 7\sqrt{2}pq + \frac{q}{48}$$

$$21x^2z + 20y$$

ตัวอย่าง

เอกสารตัวเต็มจะไม่มีลายน้ำ

สารบัญ

การคูณพหุนาม

การคูณเอกนามกับพหุนาม

การคูณเอกนามกับพหุนามแนวตั้งหน้า 103

แบบฝึกหัดที่ 8.1หน้า 104

การคูณเอกนามกับพหุนามแนวราบหน้า 105

แบบฝึกหัดที่ 8.2

ตอนที่ 1หน้า 106

ตอนที่ 2หน้า 107

ตอนที่ 3หน้า 107

ตอนที่ 4หน้า 109

การคูณพหุนามกับพหุนาม

การคูณพหุนามกับพหุนามแนวตั้งหน้า 111

แบบฝึกหัดที่ 9.1หน้า 112

การคูณพหุนามกับพหุนามแนวราบหน้า 114

แบบฝึกหัดที่ 9.2

ตอนที่ 1หน้า 116

ตอนที่ 2หน้า 117

ตอนที่ 3หน้า 118

การคูณพหุนามกับพหุนามรูปแบบเฉพาะหน้า 120

รูปแบบที่ 1 การคูณพหุนามรูปแบบ $(n_1 + a_1)(n_2 + a_2)$ หน้า 120

แบบฝึกหัดที่ 10.1

ตอนที่ 1หน้า 123

ตอนที่ 2หน้า 125

ตอนที่ 3หน้า 127

ตอนที่ 4หน้า 129

รูปแบบที่ 2 การคูณพหุนามรูปแบบ $(n + a)^2$ หน้า 132

แบบฝึกหัดที่ 10.2

ตอนที่ 1หน้า 136

ตอนที่ 2หน้า 138

ตอนที่ 3หน้า 141

ตอนที่ 4หน้า 143

ตอนที่ 5หน้า 144

รูปแบบที่ 3 การคูณพหุนามรูปแบบ $(n + a)(n - a)$ หน้า 146

แบบฝึกหัดที่ 10.3

ตอนที่ 1หน้า 149 ตอนที่ 2หน้า 151 ตอนที่ 3หน้า 153

แบบฝึกหัดที่ 10.4หน้า 155

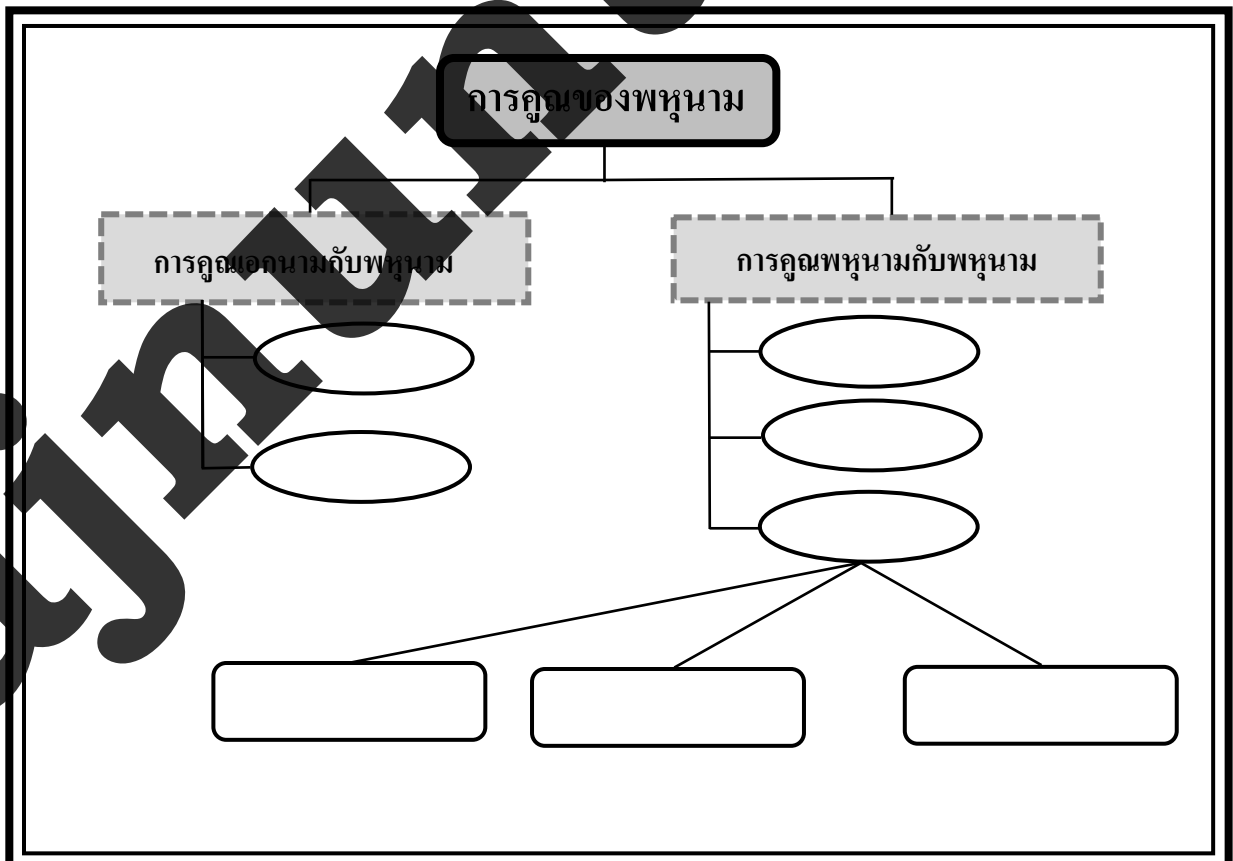
การคูณพหุนาม

สำหรับหัวข้อนี้เราจะทำการศึกษาเรื่องการคูณของพหุนามซึ่งพื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการคูณพหุนามในหัวข้อนี้คือ การคูณของเอกนามกับเอกนาม ซึ่งได้ทำการศึกษามาแล้วก่อนหน้านี้

***** ดังนั้น ผู้เรียนที่ยังไม่เข้าใจหรือยังไม่มีความรู้ในเรื่องการคูณของเอกนามกับเอกนามนั้น ต้องย้อนกลับไป !!!!! ทำความเข้าใจในหัวข้อการคูณเอกนามกับเอกนามเสียก่อน มิฉะนั้น !!! จะไม่สามารถทำการศึกษาเรื่องการคูณของพหุนามที่จะสอนจากนี้ไปได้อย่างเข้าใจ *****

การคูณของพหุนามถือเป็นหัวข้อที่มีความสำคัญมากที่จะต่อยอดไปยังหัวข้อต่างๆสำหรับพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ไม่ว่าจะเป็นเรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนาม การแก้สมการกำลังสอง เป็นต้น จึงอยากให้ผู้เรียนเห็นความสำคัญของหัวข้อการคูณพหุนามนี้เป็นอย่างมาก

เนื่องจากการคูณพหุนามนั้นประกอบไปด้วยรูปแบบหรือกรณีที่หลากหลาย ผู้เขียนจึงอยากนำเสนอแผนผังการศึกษาเกี่ยวกับหัวข้อนี้ เพื่อให้ผู้เรียนได้เข้าใจง่ายขึ้นว่า จะต้องทำการศึกษาอะไรบ้าง



การคูณเอกนามกับพหุนาม

● วิธีการคูณเอกนามกับพหุนามแนวตั้ง ขั้นตอนมีดังนี้

1. ให้เขียนพหุนามเป็นตัวตั้ง(บรรทัดแรก) โดยนิยมเรียงดีกรีของพหุนามจากมากไปน้อย และให้เขียนเอกนามเป็นตัวคูณ(บรรทัดที่สอง) ให้ตรงกับเอกนามตัวสุดท้ายของพหุนามที่เป็นตัวตั้ง
2. นำเอกนามที่เป็นตัวคูณไล่ขึ้นไปคูณกับแต่ละเอกนามของพหุนามที่เป็นตัวตั้ง โดยใช้หลักการคูณของเอกนามกับเอกนาม แล้วนำเอกนามที่ได้จากการไล่คูณนั้นเขียนลงบรรทัดที่สามก็จะได้ผลคูณของเอกนามกับพหุนามนั้น

ตัวอย่างการคูณของเอกนามกับพหุนามแนวตั้ง

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณของ $5x^2+7x-8$ กับ $6x$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของ $5x^4+7x^5-8x^3-4+9x^2$ กับ $5x^2$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณของ $5mn-3m^2+7n^2$ กับ $-2mn$

วิธีทำ

การคูณของเอกนามกับพหุนามแนวตั้งนั้น โดยส่วนตัวของผู้เขียนคิดว่าค่อนข้างเป็นวิธีการที่ยากจึงไม่ค่อยนิยมใช้กัน จึงอยากให้ผู้เรียนฝึกฝนใช้วิธีการคูณของเอกนามกับพหุนามแนวอนที่จะทำการศึกษาต่อไปให้เชี่ยวชาญจะดีกว่า

แบบฝึกหัดที่ 8.1

จงหาผลคูณของเอกนามกับพหุนามที่กำหนดให้ต่อไปนี้โดยวิธีการคูณแนวตั้ง

1) $x+3$, 4	2) $5y-9$, -6
3) a , $4+3a$	4) $-6m-3$, $-7m$
5) $-5b+6b^2$, $3b^2$	6) $7h^3$, h^2+5-7h
7) $-6p-9p^3+5p^2$, $7pq$	8) $-5c^2d$, $2b^2-3bc+5c^2$
9) $4c^2-3b^2c+5b^4$, $-5cd$	10) $-10mn$, $-7m^2n-5mn+8m-6n$

● **วิธีการคูณเอกนามกับพหุนามแนวราบ** มีหลักเกณฑ์ดังนี้

ใช้สมบัติการแจกแจงในการคำนวณหรือเรียกว่าการถอด(กำจัด)วงเล็บ แล้วใช้หลักการคูณเอกนามกับเอกนาม เข้ามาช่วยในการหาผลคูณ

สมบัติการแจกแจง

ตัวอย่างการคูณของเอกนามกับพหุนามแนวราบ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณของ $6(5x^2 + 7x - 8)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของ $(5x^4 + 7x^5 - 8x^3 - 4 + 9x^2)(5x^2)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณของ $(-2mn)(5mn - 3m^2 + 7n^2)$

วิธีทำ

หมายเหตุ

ในการคูณการคูณกันระหว่างเอกนามมากกว่า 1 เอกนามกับพหุนามนั้น ควรทำการหาผลคูณระหว่างเอกนามเสียก่อนแล้วจึงใช้สมบัติการแจกแจงในการคูณเอกนามกับพหุนาม

เช่น จงหาผลคูณของ $(5xy)(4x + 2y - 6z^3)(-4y^2z)$

วิธีทำ

แบบฝึกหัดที่ 8.2

ตอนที่ 1

จงหาผลคูณของเอกนามกับพหุนามที่กำหนดให้ต่อไปนี้โดยวิธีการคูณแนวราบ

1) $(8) \times (a+3)$	2) $(b-4) \times (6)$
3) $3 \times (x+5)$	4) $(y+9) \times 5$
5) $1 \times (3x+6)$	6) $+5 \times (2y-4)$
7) $(-3m+6) \times (+8)$	8) $(-2)(7x-6)$
9) $(9g-4)(7)$	10) $(1)(4n-9)$
11) $6(10m-8)$	12) $(-12k+3)4$
13) $(+9)(7p+3)$	14) $(15q-7)(+15)$
15) $+8(5q-7)$	16) $\left(\frac{3}{4}\right)(-12m+8)$

หน้า 107-110
มีในเอกสารตัวเต็ม

การคูณพหุนามกับพหุนาม

● วิธีการคูณพหุนามกับพหุนามแนวตั้ง ขั้นตอนมีดังนี้

1. ให้เขียนพหุนามหนึ่งเป็นตัวตั้ง(บรรทัดแรก) และให้เขียนอีกพหุนามหนึ่งเป็นตัวคูณ(บรรทัดที่สอง) ซึ่งโดยส่วนตัวของผู้เขียนนั้น นิยมใช้พหุนามที่มีจำนวนพจน์มากกว่าเป็นตัวตั้งและให้พหุนามที่มีจำนวนพจน์น้อยกว่าเป็นตัวคูณ แต่ถ้าพหุนามทั้งสองมีจำนวนพจน์เท่ากันแล้วจะใช้พหุนามใดเป็นตัวตั้งก็ได้และทั้งพหุนามตัวคูณและตัวตั้งนั้นควรทำการเรียงของลำดับดีกรีด้วย

2. นำเอกนามทีละพจน์ของตัวคูณคูณกับพหุนามของตัวตั้ง ได้เท่าใดให้เขียนในบรรทัดที่ 3, 4, ... ไปเรื่อยๆจนครบทุกพจน์ของตัวคูณ

3. นำผลคูณทุกบรรทัดมาบวกกันตามหลักการของการบวกพหุนาม แล้วเขียนไว้บรรทัดสุดท้าย ผลบวกที่ได้จะเป็นผลคูณของพหุนามกับพหุนามนั้น โดยควรทำการเรียงดีกรีของพหุนามที่เป็นคำตอบด้วย

ตัวอย่างการคูณของพหุนามนามกับพหุนามแนวตั้ง

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณของ $x - 8$ กับ $x + 3$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของ $5x^2 - 3$ กับ $7x - 4 + 9x^2$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณของ $5mn - 3m^2 + 7n^2$ กับ $-2mn + 4m^2 - n^2$

วิธีทำ

การคูณของพหุนามกับพหุนามแนวตั้งนั้น โดยส่วนตัวของผู้เขียนคิดว่าค่อนข้างเป็นวิธีการที่ยุ่งยากจึงไม่ค่อยนิยมใช้กัน จึงอยากให้ผู้เรียนฝึกฝนใช้วิธีการคูณของพหุนามกับพหุนามแนวราบที่จะทำการศึกษาต่อไปให้เชี่ยวชาญจะดีกว่า

แบบฝึกหัดที่ 9.1

จงหาผลคูณของพหุนามกับพหุนามที่กำหนดให้ต่อไปนี้โดยวิธีการคูณแนวตั้ง

1) $x+2$, $x+3$

2) $5y-9$, $6y+4$

3) $2ab+6$, $5ab-3$

4) $-5+6b^2$, $3b^2-4$

5) $-6m^2-3m+5$, $-7m-4$

6) $3 - 6pq - 9p^3q + 5p^2q$, $7p - 2$

7) $-5c^2 + 4c + 4$, $2 - 3c^2 + 5c$

8) $8mn - 6m^2 + 4n^2$ กับ $-2mn + m^2 - 5n^2$

● วิธีการคูณพหุนามกับพหุนามแนวราบ

ก่อนทำการศึกษารูปการคูณพหุนามกับพหุนามแนวราบ ขอทบทวนการคูณพหุนามกับพหุนามแนวตั้งเพื่อศึกษาพฤติกรรมของการคูณของพหุนามเพื่อที่จะนำไปสู่วิธีการคูณพหุนามกับพหุนามแนวราบ

พิจารณาการคูณแนวตั้งของพหุนามกับพหุนามต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณของ $(x+5)(x+3)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของ $(7x^3 + 5x^2 - 4x - 9)(2x^2 - 3x + 2)$

วิธีทำ

จากตัวอย่างการคูณพหุนามกับพหุนามแนวตั้งจะสังเกตได้ว่า ผลลัพธ์ที่ได้ขึ้นเกิดจากการที่แต่ละเอกนามของพหุนามหนึ่ง(ตัวคูณ)คูณกับทุกเอกนามของพหุนามอีกพหุนามหนึ่ง(ตัวตั้ง) แล้วนำผลคูณที่ได้ทั้งหมดมาบวกกัน จากพฤติกรรมของการคูณแนวตั้งนั้น เพื่อประหยัดเวลาและพื้นที่ในการคูณจึงสามารถสรุปเป็นแนวทางการคูณแบบแนวราบได้

ดังนี้

①

แต่เนื่องจากการคูณมีคุณสมบัติการสลับที่การคูณจึงสามารถที่จะนำแต่ละเอกนามของพหุนามตัวหน้าคูณกับทุกเอกนามของพหุนามตัวหลังได้ด้วย ดังนี้

②

จะสังเกตได้ว่า ① = ② ดังนั้นเราสามารถชี้วิธีการแจกแจงการคูณการคูณจากพหุนามตัวหลังไปพหุนามตัวหน้าตาม ① หรือจะใช้วิธีการแจกแจงการคูณจากพหุนามตัวหน้าไปตัวหลังก็ได้ตาม ②

แต่โดยส่วนตัวของผู้อ่านและโดยทั่วไปนั้น เรานิยมการแจกแจงการคูณจากพหุนามตัวหน้าไปพหุนามตัวหลังมากกว่า ทั้งนี้ทั้งนั้นอย่าลืมว่าสามารถทำได้ทั้ง 2 วิธี จากที่กล่าวมาทั้งหมดสรุปได้ว่า

วิธีการคูณพหุนามกับพหุนามแนวราบ

การหาผลคูณระหว่างพหุนามกับพหุนามทำได้โดยคูณแต่ละเออนามของพหุนามหนึ่งกับทุกๆเออนามของอีกพหุนามหนึ่งแล้วนำผลคูณเหล่านั้นมาบวกกัน

ตัวอย่างการคูณพหุนามกับพหุนามแนวราบ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลคูณของ $(x+8)(x-5)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของ $(x^2 - 5x + 8)(x - 7)$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณของ $(5m^2n + 4mn + 7)(2m - 9n + 5)$

วิธีทำ

แบบฝึกหัดที่ 9.2

ตอนที่ 1

จงหาผลคูณของพหุนามกับพหุนามที่กำหนดให้ต่อไปนี้โดยวิธีการคูณแนวราบ

1) $x+2$, $x+3$

2) $y+7$, $y-5$

3) $z+5$, $z-4$

4) $k+12$, $k-12$

5) $a-9$, $a-3$

6) $2b+5$, $b+6$

7) $5p+10$, $p-1$

8) $7n-4$, $7n-4$

9) $12m-7$, $m-2$

10) $7-5c$, $4c+1$

หน้า 117-119
มีในเอกสารตัวเต็ม

● วิธีการคูณพหุนามกับพหุนามรูปแบบเฉพาะ

สำหรับการคูณพหุนามกับพหุนามรูปแบบเฉพาะนั้น เป็นรูปแบบการคูณพหุนามกับพหุนามที่มีลักษณะพิเศษเฉพาะตัวที่นอกเหนือจากวิธีการคูณพหุนามกับพหุนามแนวตั้งและแนวราบ ทั้งนี้ทั้งนั้นในการคูณพหุนามกับพหุนามนั้นมีหลายรูปแบบ แต่ในที่นี้ผู้สอนขอแนะนำการคูณพหุนามกับพหุนามรูปแบบเฉพาะ 3 รูปแบบที่จำเป็นและเป็นพื้นฐานที่จะต่อยอดไปสู่หัวข้ออื่นๆของคณิตศาสตร์ คือ

รูปแบบที่ 1 การคูณพหุนามรูป $(n_1 + a_1)(n_2 + a_2)$

รูปแบบที่ 2 การคูณพหุนามรูป $(n + a)^2$

รูปแบบที่ 3 การคูณพหุนามรูป $(n + a)(n - a)$

รูปแบบที่ 1 การคูณพหุนามรูปแบบ $(n_1 + a_1)(n_2 + a_2)$

การคูณพหุนามกับพหุนามในรูปแบบของ $(n_1 + a_1)(n_2 + a_2)$ นั้น เป็นการคูณของพหุนามที่มีความสำคัญมากซึ่งเป็นรากฐานสำคัญในการต่อยอดไปสู่การแยกตัวประกอบของพหุนามกำลังสองที่จะเป็นพื้นฐานต่อยอดอีกไปยังการแก้สมการกำลังสองซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ จึงอยากให้ผู้เรียนตั้งใจศึกษาหัวข้อนี้ให้เป็นอย่างดี

ข้อควรระวัง



ก่อนจะเริ่มทำการศึกษาในหัวข้อนี้ อยากจะขอแชรประสบการณ์สอนในการสอนคณิตศาสตร์ในหัวข้อนี้สักเล็กน้อย ผู้เขียนพบว่ายังมีนักเรียนส่วนหนึ่งไม่มากนักที่ยังคิดว่า

$$(x + 5)(x + 8) = x^2 + 40 \quad \text{ขอเตือนว่า ผิด!!!!}$$

หากนักเรียนคนใดที่ยังทำหรือคิดว่า ผลคูณของพหุนามได้ตามข้างต้นนั้น ขอให้รู้ว่า ผิด!!!! หลักการของคณิตศาสตร์ ฉะนั้นจึงขอให้ตั้งใจศึกษาการคูณพหุนามรูปแบบนี้อย่างตั้งใจ

ข้อตกลงการคูณพหุนามรูปแบบ $(n_1 + a_1)(n_2 + a_2)$

1. การคูณพหุนามกับพหุนามรูปแบบนี้จะเป็นการคูณกันของ 2 พหุนามที่แต่ละพหุนามนั้นมี 2 พจน์ คือ พจน์หน้าและพจน์หลัง โดยจุดสำคัญของการคูณรูปแบบนี้ คือพจน์หน้าของแต่ละพหุนามและพจน์หลังของแต่ละพหุนามนั้นเป็นเอกนามคล้ายกัน

ให้ พจน์(เอกนาม)หน้าของพหุนามแรก เขียนย่อว่า n_1 , พจน์(เอกนาม)หน้าของพหุนามที่สอง เขียนย่อว่า n_2

พจน์(เอกนาม)หลังของพหุนามแรก เขียนย่อว่า a_1 , พจน์(เอกนาม)หลังของพหุนามที่สอง เขียนย่อว่า a_2

⚠ n_1 และ n_2 เป็นเอกนามคล้ายกัน , a_1 และ a_2 เป็นเอกนามคล้ายกัน ⚠

เช่น

$(n_1+a_1)(n_2+a_2)$	n_1	n_2	a_1	a_2
$(x+9)(x-4)$				
$(5y-6)(7y+3)$				
$(6m^2+2)(5m^2-7)$				
$(4p-7q)(3p-q)$				
$(x^2y-4z)(-3x^2y+9z)$				

จากพหุนามในลักษณะข้างต้นสามารถใช้วิธีการคูณในรูปแบบนี้ได้

2. อาจจะต้องใช้คุณสมบัติการสลับที่ของการบวกในการจัดรูป เพื่อให้พจน์หน้าและพจน์หลังของพหุนามหนึ่งเป็นเอกนามคล้ายกันกับพหุนามพจน์หน้าและพจน์หลังของอีกพหุนามหนึ่ง

เช่น

จัดรูปใหม่

$$(x+8)(6+x) \longrightarrow$$

$$(7+4p)(2p-5) \longrightarrow$$

$$(12-5m^2)(m^2-4) \longrightarrow$$

$$(6m-3n)(7n+2m) \longrightarrow$$

$$(4b^5-3c^2)(7c^2-5b^5) \longrightarrow$$

3. พิจารณาการคูณพหุนามกับพหุนามที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 $(x+5)(x+7) =$
 $=$

ตัวอย่างที่ 2 $(6y+2)(5y-3) =$
 $=$

ตัวอย่างที่ 3 $(5m^2-4n)(2m^2+3n) =$
 $=$

จะสังเกตได้ว่า ผลคูณของพหุนามกับพหุนามในรูปแบบนี้นั้น จะได้ผลคูณตอนแรกออกมา 4 พจน์ แต่เนื่องจากพจน์ที่เกิดจาก n_1a_2 กับ n_2a_1 นั้น สามารถนำมาบวกกันได้เนื่องจากเป็นเอกนามที่คล้ายกัน จึงทำให้ได้ผลสำเร็จของการคูณออกมาเป็น 3 พจน์ ซึ่งประกอบไปด้วย พจน์หน้า พจน์กลาง และพจน์หลัง ได้ความสัมพันธ์ว่า

$$(n_1 + a_1)(n_2 + a_2) = n_1n_2 + n_1a_2 + n_2a_1 + a_1a_2$$

$$\therefore \text{ผลคูณ} = \text{พจน์หน้า} + \text{พจน์กลาง} + \text{พจน์หลัง}$$

เนื่องจากความสัมพันธ์ที่ได้ตามข้างต้นนั้น ค่อนข้างท่องจำยากโดยเฉพาะในส่วนของ $+n_1d_2 + n_2d_1$ ดังนั้นจึงมีวิธีที่นิยมในการท่องจำการคูณพหุนามในรูปแบบนี้ว่า

$$(n_1 + d_1)(n_2 + d_2) = \boxed{\text{(หน้า)(หน้า)}} + \boxed{\text{(ใกล้)(ใกล้)}} + \boxed{\text{(ไกล)(ไกล)}} + \boxed{\text{(หลัง)(หลัง)}}$$

∴ ผลคูณ = พจน์หน้า + พจน์กลาง + พจน์หลัง

โดยทั่วไปการคูณพหุนามรูปแบบนี้มักจะหาพจน์หน้าของผลคูณจาก (หน้า)(หน้า) จากนั้นหาพจน์หลังของผลคูณจาก (หลัง)(หลัง) เสียก่อน แล้วค่อยหาพจน์กลางของผลคูณจาก (ใกล้)(ใกล้) + (ไกล)(ไกล)

ตัวอย่างการคูณพหุนามรูป $(n_1+d_1)(n_2+d_2)$

1. $(x+6)(x+9)$ = =	2. $(y-4)(y+10)$ = =
3. $(3m+10)(2m+5)$ = =	4. $(7p-4)(3p-9)$ = =
5. $(-8b+2)(-4b-5)$ = =	6. $(5a-3b)(a+6b)$ = =
7. $(5x^2y+6)(7x^2y-5)$ = =	8. $(-4p^5+10q^3)(7p^5-5q^3)$ = =

เมื่อนักเรียนเข้าใจการคูณพหุนามกับพหุนามรูปแบบนี้ได้เป็นอย่างดีแล้ว เพื่อเป็นการประหยัดเวลาและพื้นที่ในการคิดอาจไม่จำเป็นต้องแสดงวิธีการทำตามตัวอย่างข้างต้น นักเรียนควรทำการฝึกคิดในใจโดยเฉพาะอย่างยิ่งพจน์กลางของผลคูณให้เชี่ยวชาญแล้วเขียนผลคูณที่ได้ในทันที เช่น

1. $(x+12)(x+5) =$	2. $(y-8)(y+6) =$
3. $(7m+9)(2m+3) =$	4. $(4p-1)(2p-7) =$
5. $(-4b+3)(-3b-5) =$	6. $(2a-3b)(a+2b) =$
7. $(4x^2y+3)(7x^2y-1) =$	8. $(-4p^5+q^3)(2p^5-5q^3) =$

แบบฝึกหัดที่ 10.1

ตอนที่ 1

จงหาผลคูณของพหุนามกับพหุนามที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $x+2$, $x+3$

2) $y+5$, $y+4$

3) $m+7$, $m+4$

4) $a+9$, $a+2$

5) $p+7$, $p+1$

6) $t+6$, $t+9$

7) $d+3$, $d+10$

8) $z+11$, $z+5$

9) $e+8$, $e+4$

10) $g+6$, $g+6$

11) $h+7$, $h+12$

12) $w+10$, $w+12$

หน้า 124-131
มีในเอกสารตัวเต็ม

รูปแบบที่ 2

การคูณพหุนามรูปแบบ $(n + l)^2$

การคูณพหุนามกับพหุนามในรูปแบบของ $(n + l)^2$ นั้น จะได้ผลคูณเป็นพหุนามที่เรียกว่า **พหุนามกำลังสองสมบูรณ์** ผู้สอนจึงขอเรียกวิธีการคูณรูปแบบนี้ว่า **การคูณแบบกำลังสองสมบูรณ์** การคูณพหุนามกับพหุนามรูปแบบนี้ เป็นการคูณที่มีลักษณะพิเศษที่จะช่วยประหยัดเวลาและขั้นตอนในการหาผลลัพธ์ของการคูณได้โดยไม่ต้องใช้วิธีปกติของการคูณพหุนามกับพหุนาม ไม่ว่าจะเป็นวิธีการคูณแนวตั้งหรือการคูณแนวราบ การหาผลคูณในรูปแบบกำลังสองสมบูรณ์นั้นเป็นพื้นฐานที่สำคัญสำหรับการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับต่อไป ไม่ว่าจะเป็นการแยกตัวประกอบของพหุนาม, การแก้สมการกำลังสอง ฯลฯ จึงอยากให้ผู้เรียนตั้งใจศึกษาหัวข้อนี้ให้เป็นอย่างดี

ข้อควรระวัง



ก่อนจะเริ่มทำการศึกษาในหัวข้อนี้ อาจจะขอแฉ่ประสบการณ์สอนในการสอนคณิตศาสตร์ในหัวข้อนี้สักเล็กน้อย ผู้เขียนพบว่ายังมีนักเรียนส่วนหนึ่งไม่มากก็น้อยที่ยังคิดว่า

$$(x+5)^2 = x^2 + 5^2 \quad \text{ขอเตือนว่า} \quad \text{ผิด} \quad \text{!!!!!!}$$

หากนักเรียนคนใดที่ยังทำหรือคิดว่า สามารถกระจายเลขยกกำลังสองเข้าไปที่ x และ 5 ได้แล้วนั้น ขอให้รู้ว่า **ผิด!!!!** หลักการของคณิตศาสตร์ ฉะนั้นจึงขอให้ตั้งใจศึกษาการคูณแบบกำลังสองสมบูรณ์นี้อย่างตั้งใจ

จากที่เราศึกษาเรื่องเลขยกกำลังทำให้เราทราบดีอยู่แล้วว่า จำนวนใดๆคูณกับตัวเองหลายๆครั้ง สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเลขยกกำลังได้

เช่น $3 \times 3 = \underline{\hspace{2cm}}$, $5 \times 5 \times 5 \times 5 = \underline{\hspace{2cm}}$, $a \times a \times a \times a \times a = \underline{\hspace{2cm}}$

ในทางเดียวกัน พหุนามก็ถือเป็นค่าหนึ่งที่แทนค่าของจำนวน เมื่อพหุนามพหุนามหนึ่งคูณกับตัวเองหลายๆครั้ง ก็สามารถที่จะเขียนให้อยู่ในรูปของเลขยกกำลังได้เช่นเดียวกัน

เช่น $(x+5)(x+5) = \underline{\hspace{2cm}}$

$$(3x-7)(3x-7)(3x-7) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(3a^2 + 6a - 2)(3a^2 + 6a - 2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

แต่สำหรับข้อนี้เราจะทำการศึกษาการคูณของพหุนามที่เหมือนกันสองครั้ง โดยที่พหุนามนั้นเป็นพหุนามที่มี 2 พจน์ หรือจะเรียกได้ว่า พหุนามนั้นมีแค่พจน์หน้ากับพจน์หลัง

เช่น $(x+9)(x+9)$ หรือเขียนในรูปเลขยกกำลังได้ว่า $\underline{\hspace{2cm}}$

$$(5m-3)(5m-3) \text{ หรือเขียนในรูปเลขยกกำลังได้ว่า } \underline{\hspace{2cm}}$$

ข้อตกลงการคูณพหุนามรูปแบบกำลังสองสมบูรณ์

1. โดยทั่วไปแล้วพจน์สองพจน์ที่อยู่ในวงเล็บที่ยกกำลังสองนั้น สำหรับผู้สอนเองนั้นถ้าพจน์ทั้งสองประกอบไปด้วยพจน์ที่มีตัวแปรกับพจน์ที่เป็นค่าคงตัว(ตัวเลข) ผู้เขียนจะให้พจน์ที่มีตัวแปรเป็นพจน์หน้าและให้พจน์ที่เป็นค่าคงตัวเป็นพจน์หลังเสมอ

เช่น

$$(6 + x)^2 \quad \text{จัดรูปใหม่ได้ว่า ; } \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(-5 + y)^2 \quad \text{จัดรูปใหม่ได้ว่า ; } \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(14 + 2m)^2 \quad \text{จัดรูปใหม่ได้ว่า ; } \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(-7 - 3p)^2 \quad \text{จัดรูปใหม่ได้ว่า ; } \underline{\hspace{2cm}}$$

2. พหุนามที่คูณด้วยด้วยวิธีกำลังสองสมบูรณ์นั้น จะเป็นพหุนามที่ประกอบไปด้วยพจน์ 2 พจน์ คือ พจน์หน้า (น) และพจน์หลัง (ล) ที่อยู่ในรูปยกกำลังสอง

เช่น

$$(x+5)^2 \quad \text{พจน์หน้า (น) คือ } \underline{\hspace{1cm}}, \quad \text{พจน์หลัง (ล) คือ } \underline{\hspace{1cm}}$$

$$(a-8)^2 \quad \text{พจน์หน้า (น) คือ } \underline{\hspace{1cm}}, \quad \text{พจน์หลัง (ล) คือ } \underline{\hspace{1cm}}$$

$$(-2m+7)^2 \quad \text{พจน์หน้า (น) คือ } \underline{\hspace{1cm}}, \quad \text{พจน์หลัง (ล) คือ } \underline{\hspace{1cm}}$$

$$(-5p-9)^2 \quad \text{พจน์หน้า (น) คือ } \underline{\hspace{1cm}}, \quad \text{พจน์หลัง (ล) คือ } \underline{\hspace{1cm}}$$

3. พิจารณาตัวอย่างที่กำหนดต่อไปนี้

กำหนดให้ พจน์หน้า เขียนย่อว่า “น” , พจน์หลัง เขียนย่อว่า “ล”

สูตรการคูณรูปแบบกำลังสองสมบูรณ์

$$(n + l)^2 = n^2 + 2(n)(l) + l^2$$



ต้องให้ขึ้นใจ



ข้อควรระวังในการใช้สูตรกำลังสองสมบูรณ์

1. จากที่ได้เคยกล่าวไปแล้วในข้างต้น

$$(x+5)^2 = x^2 + 5^2 \quad \text{X} \quad \text{อย่า!!!!!!!!!!!!!!} \text{กระจายกำลังสองเข้าไป}$$

2. สิ่งที่ต้องระวังในการใช้สูตร

ในกรณีที่พจน์หน้า (n) หรือพจน์หลัง (l) มีเครื่องหมาย - อยู่หน้าพจน์ ในส่วนของ $(n)^2$ หรือ $+(l)^2$ ที่อยู่ในสูตรนั้น เมื่อแทนพจน์หน้า (n) หรือพจน์หลัง (l) ลงในสูตร อย่าลืมเขียนให้อยู่ในรูปของวงเล็บยกกำลังสอง ไม่เช่นนั้นจะทำให้ผลคูณที่ได้นั้นผิด

ตัวอย่าง $(x-3)^2 =$

 อย่าทำแบบนี้เด็ดขาด !!!!

ตัวอย่าง $(-x-6)^2 =$

 อย่าทำแบบนี้เด็ดขาด !!!!

ในกรณีที่พจน์หน้า(n) หรือพจน์หลัง(l) ของพหุนามเป็นตัวแปรที่มีค่าคงตัว เช่น $(7x+5)^2$, $(3x+2y)^2$ เป็นต้น ในส่วนของ $(n)^2$ และ $(l)^2$ ที่อยู่ในสูตรนั้น เมื่อแทนพจน์หน้า(n) หรือพจน์หลัง(l) ลงในสูตร ต้องเขียนอยู่ในรูปของวงเล็บยกกำลังสอง ไม่เช่นนั้นจะทำให้ผลคูณที่ได้นั้นผิด

ตัวอย่าง $(5x+4)^2 =$

 อย่าทำแบบนี้เด็ดขาด !!!

ตัวอย่าง $(3x+5y)^2 =$

 อย่าทำแบบนี้เด็ดขาด !!!!

ตัวอย่าง $(6x-3y)^2 =$

 อย่าทำแบบนี้เด็ดขาด !!!!

ตัวอย่างการคูณพหุนามรูปแบบกำลังสองสมบูรณ์

1. $(x+6)^2$	2. $(y-4)^2$
3. $(-m+10)^2$	4. $(-p-7)^2$
5. $(3b+2)^2$	6. $(5d-3)^2$
7. $(-7n+5)^2$	8. $(-4x-7)^2$
9. $(2x+y)^2$	10. $(9p-5q)^2$
11. $(-4b+3c)^2$	12. $(-3g-7h)^2$
13. $(5a^2+3b^3)^2$	14. $(7x^5-3yz^3)^2$

เมื่อนักเรียนเข้าใจการใช้สูตรการคูณแบบกำลังสองสมบูรณ์ได้เป็นอย่างดีแล้ว อาจไม่จำเป็นต้องแสดงวิธีการทำตามตัวอย่างข้างต้น ในขั้นตอนการแทนพจน์หน้าและพจน์หลังลงไปในสูตรนั้น นักเรียนควรทำการฝึกคิดในใจให้เชี่ยวชาญแล้วเขียนเพียงผลคูณที่ได้ในทันที เพื่อเป็นการประหยัดเวลาและพื้นที่ในการคิด

เช่น

$$(x+6)^2$$

=

=

$$(5d-3)^2$$

=

=



แบบฝึกหัดที่ 10.2

ตอนที่ 1

จงหาผลคูณของพหุนามที่กำหนดให้ต่อไปนี้ด้วยวิธีกำลังสองสมบูรณ์

1) $(x+5)^2$

2) $(y+10)^2$

3) $(a+6)^2$

4) $(b+12)^2$

5) $(z+4)^2$

6) $(h+7)^2$

7) $(b+1)^2$

8) $(m+3)^2$

9) $(n+9)^2$

10) $(p+2)^2$

11) $(r+8)^2$

12) $(w+11)^2$

หน้า 137-145
มีในเอกสารตัวเต็ม

รูปแบบที่ 3

การคูณพหุนามรูปแบบ (น + ล)(น - ล)

การคูณพหุนามกับพหุนามในรูปแบบของ (น + ล)(น - ล) นั้น จะได้ผลคูณเป็นพหุนามที่อยู่ในรูปของ ผลต่างกำลังสอง ผู้สอนจึงขอเรียกวิธีการคูณรูปแบบนี้ว่า การคูณแบบผลต่างกำลังสอง

ข้อตกลงการคูณพหุนามแบบผลต่างกำลังสอง

1. พหุนามที่จะสามารถใช้วิธีการคูณแบบผลต่างกำลังสองได้นั้น ต้องมีองค์ประกอบดังต่อไปนี้

- พหุนาม 2 พหุนามนั้น แต่ละพหุนามนั้นมี 2 พจน์ คือ _____
- พจน์หน้า (น) ของแต่ละพหุนามนั้น _____
- พจน์หลัง (ล) ของแต่ละพหุนามนั้น _____

เช่น



2. อาจต้องใช้คุณสมบัติการสลับที่ของการบวกหรือการดึงตัวร่วม (-1) เพื่อที่จะทำให้พหุนามทั้งสองพหุนามนั้นสามารถใช้ในการคูณแบบผลต่างกำลังสองได้

เช่น

$(x+6)(-6+x)$ ใช้คุณสมบัติการสลับที่การบวก
 $(3+m)(m-3)$ ใช้คุณสมบัติการสลับที่การบวก
 $(-y^2-6)(y^2-6)$ ใช้คุณสมบัติการดึงตัวร่วม หรือ ใช้การดึงตัวร่วม (-1) ออกมา

3. พิจารณาตัวอย่างที่กำหนดต่อไปนี้

กำหนดให้ พจน์หน้า เขียนย่อว่า “น” , พจน์หลัง เขียนย่อว่า “ล”

สูตรการคูณแบบผลต่างกำลังสอง

$$(น + ล)(น - ล) = (น)^2 - (ล)^2$$



ท่องให้ขึ้นใจ



ข้อควรระวังในการใช้สูตรการคูณแบบผลต่างกำลังสอง

1. การคูณพหุนามกับพหุนามในรูปแบบของ $(n + a)(n - a) = (n)^2 - (a)^2$ ในส่วนของ $-(a)^2$ นั้น คำตอบจะต้อง **มีค่าเป็นลบ!!!!!! ไม่ใช่บวก** จากประสบการณ์การสอนผู้สอนพบว่ายังมีนักเรียนส่วนหนึ่งไม่มากก็น้อยที่ยังเข้าใจผิดว่า $-(a)^2$ จะมีค่าเป็นบวก

เช่น

$$-(4)^2 = 16 \quad \text{เพราะคิดว่า} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{ที่ถูกต้อง คือ} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

ดังนั้น

ตัวอย่าง $(x + 7)(x - 7) =$



อย่าทำแบบนี้เด็ดขาด !!!!

ตัวอย่าง $(12 - x)(12 + x) =$



อย่าทำแบบนี้เด็ดขาด !!!!

2. พจน์หน้าหรือพจน์หลัง ถ้าเป็นพจน์ที่มีค่าคงตัวคูณหน้าตัวแปรหรือมีตัวแปรหลายตัว เวลาใช้สูตรให้เขียนอยู่ในรูปของวงเล็บตามสูตรการคูณห้ามละวงเล็บ มิฉะนั้นจะทำให้ได้ผลคูณที่ไม่ถูกต้อง

ตัวอย่าง $(5x + 4)(5x - 4) =$



อย่าทำแบบนี้เด็ดขาด !!!!

ตัวอย่าง $(7a - 2bc)(7a + 2bc) =$



อย่าทำแบบนี้เด็ดขาด !!!!

ตัวอย่างการคูณพหุนามแบบผลต่างกำลังสอง

1. $(x+6)(x-6)$	2. $(y-4)(y+4)$
3. $(7+p)(7-p)$	4. $(-m+10)(-m-10)$
5. $(7+p)(7-p)$	6. $(5d-3)(5d+3)$
7. $(25m+15n)(25m-15n)$	8. $(-4x-21y)(-4x+21y)$
9. $(13p^2+9q^2)(13p^2-9q^2)$	10. $(6b^5-17c^7)(6b^5+17c^7)$
11. $(6mn+3p^5)(6mn-3p^5)$	12. $(23g+7h)(-7h+23g)$

เมื่อนักเรียนเข้าใจการใช้สูตรการคูณแบบผลต่างกำลังสองได้เป็นอย่างดีแล้ว อาจไม่จำเป็นต้องแสดงวิธีการทำตามตัวอย่างข้างต้น ในขั้นตอนการแทนพจน์หน้าและพจน์หลังลงไปในสูตรนั้น นักเรียนควรทำการฝึกคิดในใจให้เชี่ยวชาญแล้วเขียนเพียงผลคูณที่ได้ในทันที เพื่อเป็นการประหยัดเวลาและพื้นที่ในการคิด

เช่น

$$(x+6)(x-6)$$

=

=

$$(5d-3e)(5d+3e)$$

=

=

แบบฝึกหัดที่ 10.3

ตอนที่ 1

จงหาผลคูณของพหุนามที่กำหนดให้ต่อไปนี้ด้วยวิธีผลต่างกำลังสอง

1) $(x+4)(x-4)$	2) $(y+2)(y-2)$
3) $(a-5)(a+5)$	4) $(b-8)(b+8)$
5) $(9+m)(9-m)$	6) $(p-12)(p+12)$
7) $(q+3)(q-3)$	8) $(d+6)(d-6)$
9) $(e+1)(e-1)$	10) $(11-n)(11+n)$
11) $(h+7)(h-7)$	12) $(c-10)(c+10)$

หน้า 150-158
มีในเอกสารตัวเต็ม