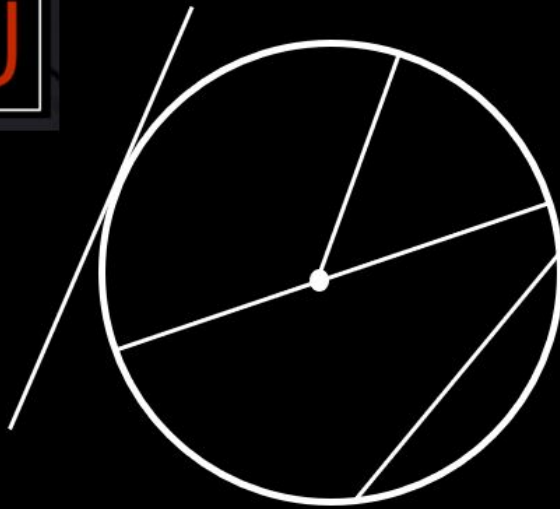


ตัวอย่างเอกสารประกอบการเรียน

กนกน

π



วงกลม

เอกสารตัวเต็มมีจำนวน 108 หน้า

เนื้อหาพร้อมแบบฝึกหัดกว่า 300 ข้อ

ajnunnu.com



เอกสารประกอบการเรียน
วิชา คณิตศาสตร์



วงกลม

เอกสารตัวจริง
ไม่มีลายน้ำ

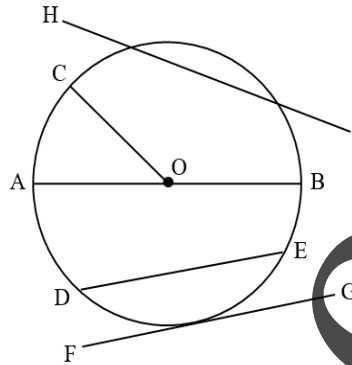
เอกสารนี้เผยแพร่ที่: ajnunu.com
ข้อกำหนดในการใช้เอกสาร: เอกสารประกอบการเรียนนี้เป็นผลงานการเรียบเรียงของ อ.วิษณุ วงศ์ธรรมสิริ ซึ่งได้รับความคุ้มครองตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ ผู้ที่ต้องการเผยแพร่ส่วนหนึ่งส่วนใดของเอกสารนี้ หรือใช้เอกสารนี้ในการประกอบการสอน ต้องได้รับการยินยอมเป็นลายลักษณ์อักษรก่อนเท่านั้น

สารบัญ

หัวข้อ	หน้า
ความหมายของวงกลมและส่วนประกอบ	1
คุณสมบัติที่ 1 และ แบบฝึกหัดที่ 1	2
คุณสมบัติที่ 2 และ แบบฝึกหัดที่ 2	5
คุณสมบัติที่ 3 และ แบบฝึกหัดที่ 3	15
คุณสมบัติที่ 4 และ แบบฝึกหัดที่ 4	25
คุณสมบัติที่ 5 และ แบบฝึกหัดที่ 5	33
คุณสมบัติที่ 6 และ แบบฝึกหัดที่ 6	40
คุณสมบัติที่ 7 และ แบบฝึกหัดที่ 7	55
คุณสมบัติที่ 8 และ แบบฝึกหัดที่ 8	77
คุณสมบัติที่ 9 และ แบบฝึกหัดที่ 9	90
คุณสมบัติที่ 10 และ แบบฝึกหัดที่ 10	96

วงกลม

วงกลม คือ รูปที่ประกอบด้วยจุดทุกจุดที่อยู่ห่างจากจุดหนึ่งที่จุดหนึ่งบนระนาบเดียวกันเป็นระยะทางเท่า ๆ กัน



ส่วนประกอบของวงกลม

- 1) จุดศูนย์กลาง คือ จุดคงที่ซึ่งอยู่ภายในวงกลมซึ่งอยู่ห่างจากจุดทุกจุดที่ประกอบเป็นวงกลม เป็นระยะทางเท่า ๆ กันบนระนาบเดียวกัน (จุดศูนย์กลางยังใช้เป็นชื่อเรียกของวงกลมนั้นๆ ด้วย)

จากรูป

จุด O คือ จุดศูนย์กลางของวงกลม O

- 2) รัศมี คือ ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดบนเส้นรอบวง

จากรูป

\overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} คือ รัศมีของวงกลม O

หมายเหตุ

1. วงกลม 1 วง มีรัศมีมากมายนับไม่ถ้วน
2. รัศมีของวงกลมเดียวกันย่อมยาวเท่ากัน
3. วงกลมใดๆ ที่มีรัศมียาวเท่ากัน ย่อมมีขนาดเท่ากัน กล่าวคือสามารถทับกันได้สนิท

- 3) เส้นผ่านศูนย์กลาง คือ ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดบนเส้นรอบวงผ่านจุดศูนย์กลางไปยังอีกจุดหนึ่งบนเส้นรอบวง

จากรูป

\overline{AB} คือ เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

หมายเหตุ

1. วงกลม 1 วง มีเส้นผ่านศูนย์กลางมากมายนับไม่ถ้วน
2. เส้นผ่านศูนย์กลาง 1 เส้น มีความยาวเท่ากับ ความยาวของรัศมี 2 เส้น

- 4) คอร์ด คือ ส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายทั้งสองอยู่บนวงกลมเดียวกัน คอร์ดแต่ละเส้นจะแบ่งส่วนโค้งของวงกลมออกเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนโค้งใหญ่ กับ ส่วนโค้งน้อย

จากรูป

\overline{DE} คือ คอร์ดของวงกลม O

หมายเหตุ

คอร์ดที่ยาวที่สุดของวงกลมวงหนึ่ง คือ เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมและแบ่งวงกลมออกเป็น ส่วนโค้ง 2 ส่วนที่เท่ากัน กล่าวคือ ครึ่งวงกลม

- 5) เส้นสัมผัสวงกลม คือ ส่วนของเส้นตรงที่ตัดวงกลมเพียงจุดเดียว

จากรูป

\overline{FG} คือ เส้นสัมผัสของวงกลม O

- 6) เส้นพาดวง คือ ส่วนของเส้นตรงที่ลากผ่านวงกลมและตัดวงกลม 2 จุด

จากรูป

\overline{HI} คือ เส้นพาดวงของวงกลม O

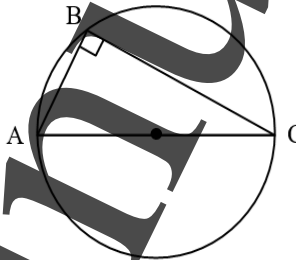
- 7) ส่วนโค้งของวงกลม

ยกตัวอย่างจากรูป

ส่วนโค้ง AC เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ว่า \widehat{AC}
ความยาวส่วนโค้ง เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ว่า $m(\widehat{AC})$

คุณสมบัติต่างๆ ของวงกลม

คุณสมบัติที่ 1 มุมภายในครึ่งวงกลมมีขนาดเท่ากับ 90 องศา

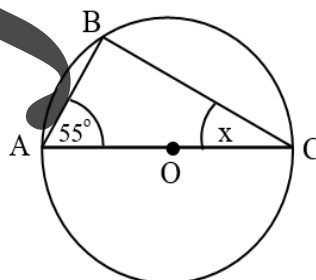


จากรูป $\angle ABC = 90^\circ$

แบบฝึกหัดที่ 1

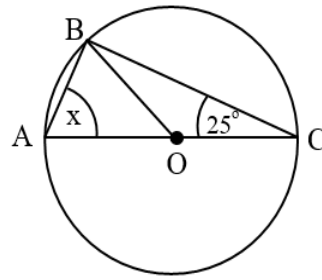
- 1) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 25°
ข) 30°
ค) 35°
ง) 40°



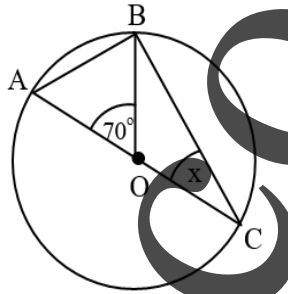
2) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 50°
- ข) 55°
- ค) 60°
- ง) 65°



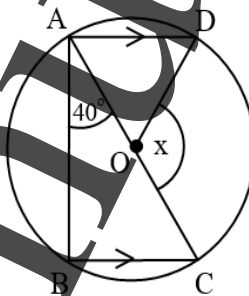
3) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 35°
- ข) 30°
- ค) 25°
- ง) 20°



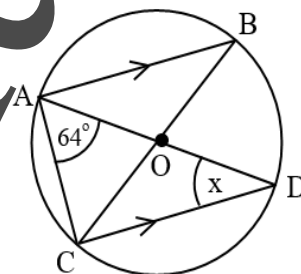
4) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 85°
- ข) 100°
- ค) 105°
- ง) 110°



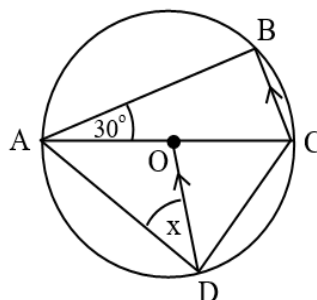
5) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 24°
- ข) 25°
- ค) 26°
- ง) 28°



6) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 30°
- ข) 32°
- ค) 35°
- ง) 40°

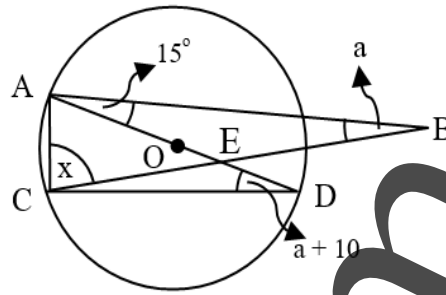


ajinabun.com

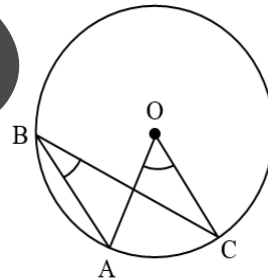
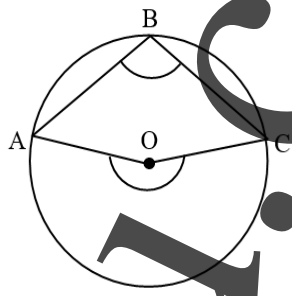
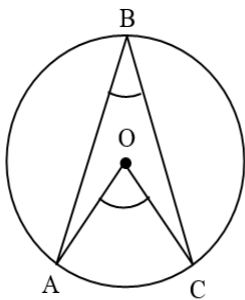
หน้า 4
มีในเอกสารตัวเต็ม

12) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 85°
- ข) 88°
- ค) 90°
- ง) 92°



คุณสมบัติที่ 2 มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็น 2 เท่าของขนาดมุมในตำแหน่งโค้งของวงกลม ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน



จากรูป

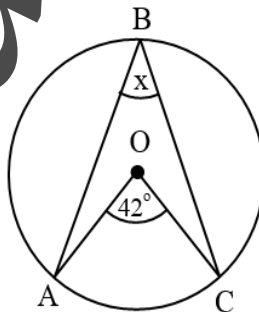
$$\angle AOC = 2\angle ABC$$

แบบฝึกหัดที่ 2

๑) **ตอนที่ 1**

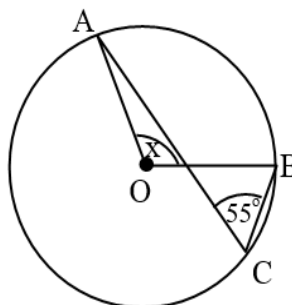
1) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 21°
- ข) 42°
- ค) 44°
- ง) 84°



2) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 22.5°
- ข) 55°
- ค) 100°
- ง) 110°

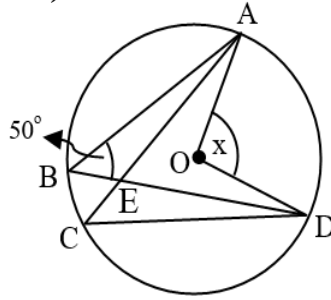


ajinabun.com

หน้า 6 - 7
มีในเอกสารตัวเต็ม

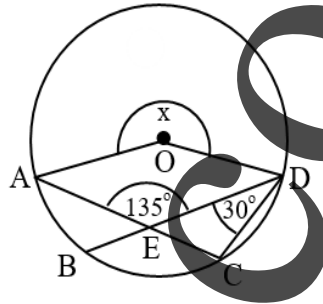
13) จากรูป จงหาค่า x (สมมติคณิต)

- ก) 95°
- ข) 100°
- ค) 105°
- ง) 110°



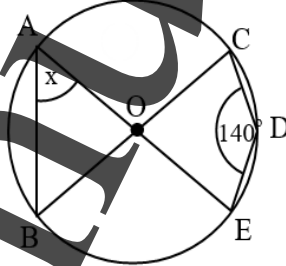
14) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 210°
- ข) 200°
- ค) 195°
- ง) 190°



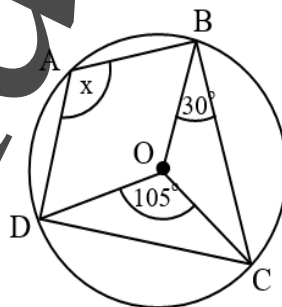
15) จากรูป จงหาค่า x เมื่อ \overline{AE} , \overline{BC} เป็นเส้นผ่านจุดศูนย์กลาง

- ก) 70°
- ข) 65°
- ค) 60°
- ง) 50°



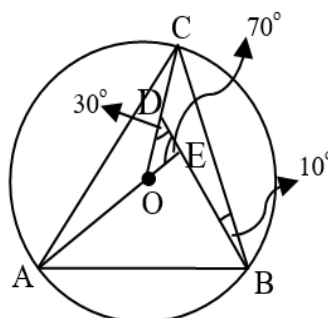
16) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 120°
- ข) 118.5°
- ค) 112.5°
- ง) 110°



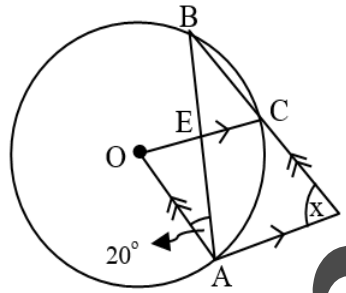
17) จากรูป จงหาค่า \widehat{BAC} (แนวเตรียมอุดม)

- ก) 45°
- ข) 55°
- ค) 60°
- ง) 70°



18) จากรูป จงหาค่า x

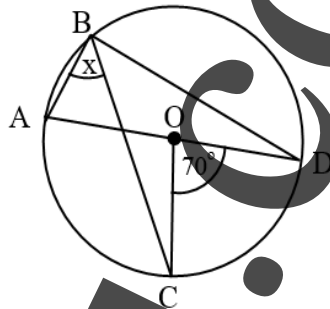
- ก) 20°
- ข) 30°
- ค) 40°
- ง) 50°



๑ ตอนที่ 2

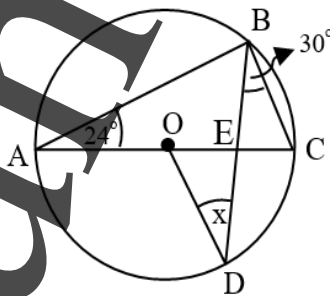
1) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 55°
- ข) 45°
- ค) 40°
- ง) 35°



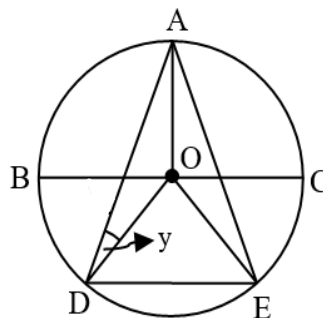
2) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 24°
- ข) 36°
- ค) 40°
- ง) 44°



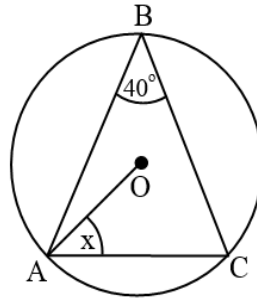
3) จากรูป $\overline{AD} = \overline{AE}$, $\angle D\hat{O}E = 80^\circ$, \overline{BC} เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง จงหาค่า y
(แนวเตรียมทหาร)

- ก) 40°
- ข) 30°
- ค) 20°
- ง) 10°



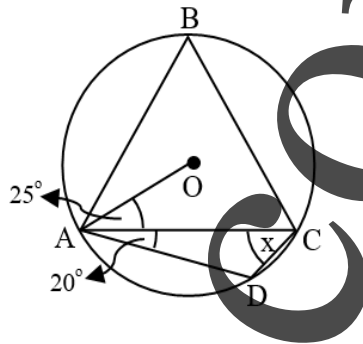
4) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 35°
- ข) 40°
- ค) 45°
- ง) 50°



5) จากรูป จงหาค่า x

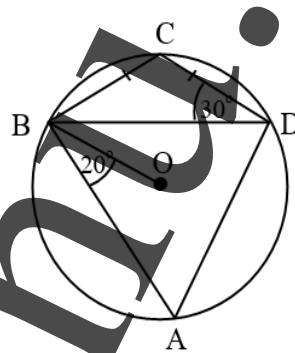
- ก) 55°
- ข) 45°
- ค) 35°
- ง) 20°



6) จากรูป จงหาค่ามุม ABC

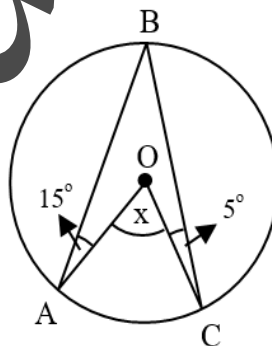
(แนวเตรียมทหาร)

- ก) 50°
- ข) 60°
- ค) 70°
- ง) 80°



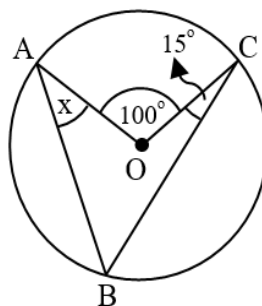
7) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 40°
- ข) 35°
- ค) 30°
- ง) 25°



8) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 40°
- ข) 35°
- ค) 30°
- ง) 25°

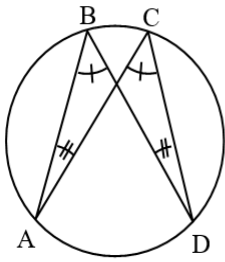


ajinamli.com

หน้า 11 - 14
มีในเอกสารตัวเต็ม

คุณสมบัติที่ 3

มุมที่เส้นรอบวงของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันหรือมีความยาวของส่วนโค้งเท่ากัน จะมีขนาดเท่ากัน

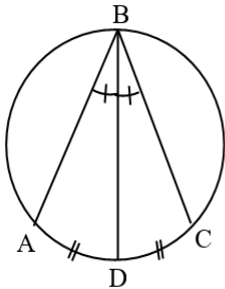


\widehat{ABD} กับ \widehat{ACD} เป็นมุมที่เส้นรอบวงที่มี \widehat{AD} รองรับ

จะได้; $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$

\widehat{BAC} กับ \widehat{BDC} เป็นมุมที่เส้นรอบวงที่มี \widehat{BC} รองรับ

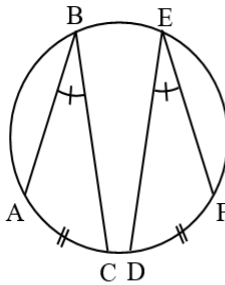
จะได้; $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$



\widehat{ABD} กับ \widehat{DBC} เป็นมุมที่เส้นรอบวงที่รองรับด้วย

\widehat{AD} กับ \widehat{DC} ที่มีความยาวเท่ากัน

จะได้; $\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$



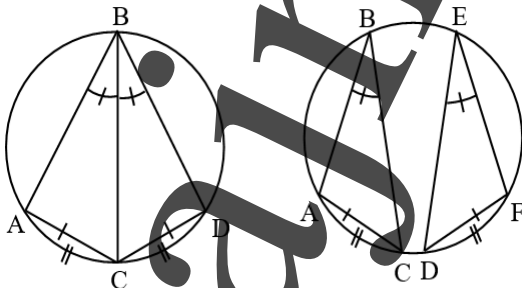
\widehat{ABC} กับ \widehat{DEF} เป็นมุมที่เส้นรอบวงที่รองรับด้วย

\widehat{AD} กับ \widehat{DF} ที่มีความยาวเท่ากัน

จะได้; $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$

เพิ่มเติม

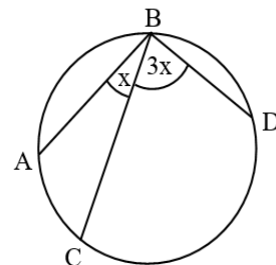
1) มุมที่เส้นรอบวงที่มีส่วนโค้งรองรับมุมยาวเท่ากัน เมื่อลากคอร์ดจากปลายมุมด้านหนึ่งไปยังปลายมุมอีกด้านหนึ่งคอร์ดจะยาวเท่ากัน



$\overline{AC} = \overline{CD}$

$\overline{AC} = \overline{DF}$

2) จากตัวอย่างข้างล่าง กำหนดให้ $m(\widehat{CD})$ ยาวเป็น 3 เท่าของ $m(\widehat{AC})$



จะได้;

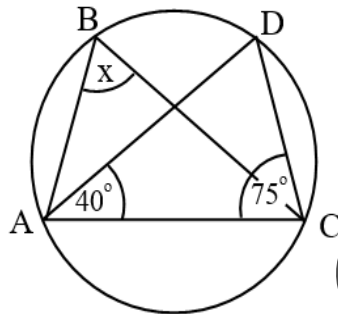
$\widehat{CBD} = 3(\widehat{ABC})$

แบบฝึกหัดที่ 3

๑ **ตอนที่ 1**

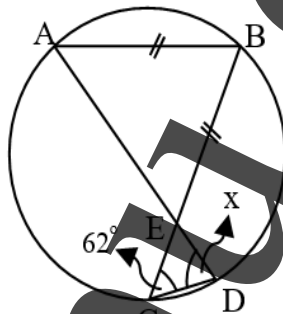
1) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 55°
- ข) 65°
- ค) 70°
- ง) 75°



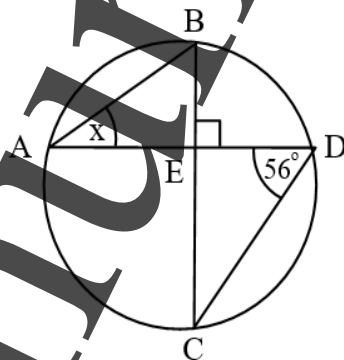
2) จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} = \overline{BE}$ จงหาค่า x

- ก) 60°
- ข) 56°
- ค) 48°
- ง) 44°



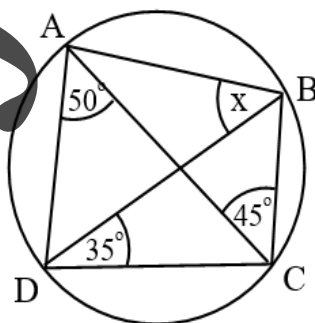
3) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 64°
- ข) 56°
- ค) 42°
- ง) 34°



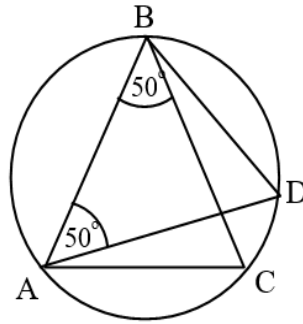
4) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 40°
- ข) 35°
- ค) 45°
- ง) 50°



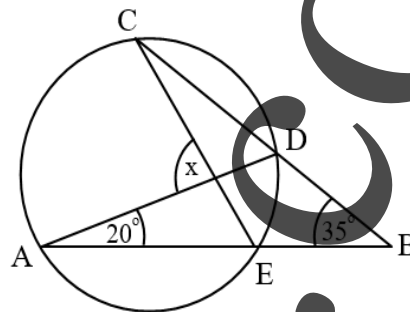
5) จากรูป ให้ $\overline{AB} = \overline{BC}$ จงหาค่า $\hat{A}BD$

- ก) 40°
- ข) 45°
- ค) 55°
- ง) 65°



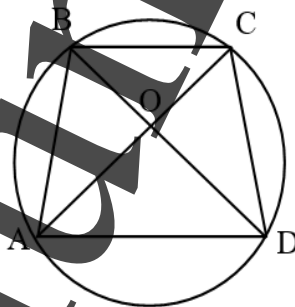
6) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 55°
- ข) 60°
- ค) 75°
- ง) 80°



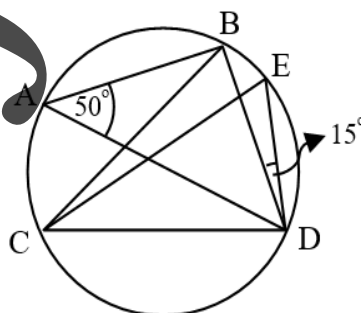
7) กำหนดให้ $\hat{ACD} = 70^\circ$, $\hat{CDA} = 60^\circ$, $\hat{DAB} = 80^\circ$ จงหา \hat{AOD} ทางกึ่งกลาง (แนวเตรียมทหาร)

- ก) 100°
- ข) 105°
- ค) 110°
- ง) 115°



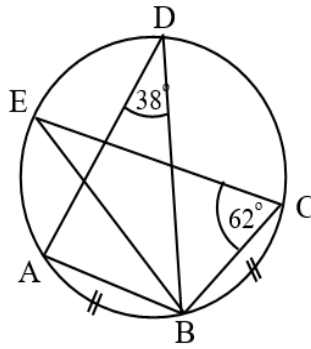
8) จากรูป จงหาค่าของ \hat{ECD}

- ก) 25°
- ข) 30°
- ค) 35°
- ง) 40°



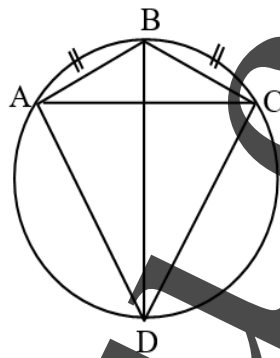
9) จากรูป จงหาค่าของ $\angle EBC$

- ก) 70°
- ข) 76°
- ค) 80°
- ง) 84°



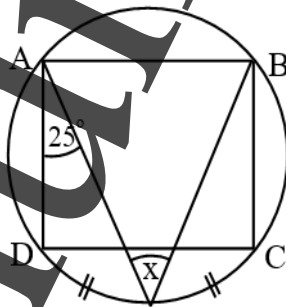
10) จากรูป $\angle ADC = 64^\circ$ จงหาค่า $\angle ABC$

- ก) 104°
- ข) 112°
- ค) 116°
- ง) 120°



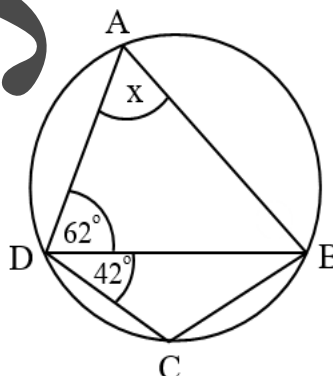
11) ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า จงหาค่าของ x

- ก) 40°
- ข) 45°
- ค) 50°
- ง) 55°



12) กำหนดให้ $\overline{AD} = \overline{BC}$ จงหาค่า x

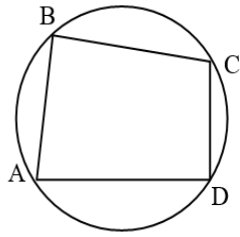
- ก) 64°
- ข) 76°
- ค) 84°
- ง) 104°



หน้า 19 - 24
มีในเอกสารตัวเต็ม

ajinabun.com

คุณสมบัติที่ 4 สี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลม โดยที่มุมทั้งสี่ของสี่เหลี่ยม ต้องอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม มุมตรงข้ามของสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมรวมกันได้ 180 องศา



จากรูป

$$\hat{A}BC + \hat{A}DC = 180^\circ$$

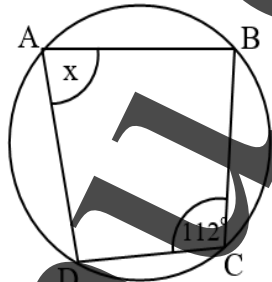
$$\hat{B}AD + \hat{B}CD = 180^\circ$$

แบบฝึกหัดที่ 4

๑ ตอนที่ 1

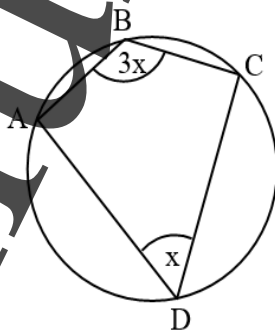
1) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 58°
- ข) 68°
- ค) 70°
- ง) 78°



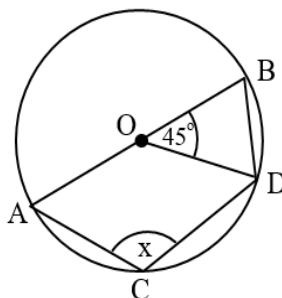
2) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 35°
- ข) 40°
- ค) 45°
- ง) 50°



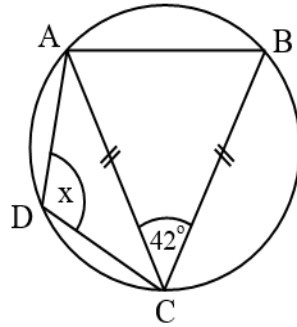
3) จากรูป จงหาค่า x (AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง)

- ก) 110°
- ข) 112.5°
- ค) 114.25°
- ง) 116°



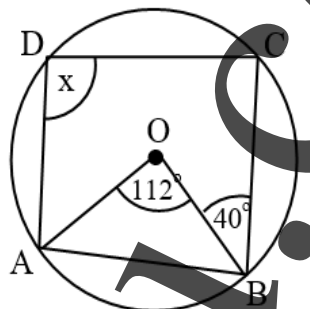
4) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 111°
- ข) 112°
- ค) 113°
- ง) 114°



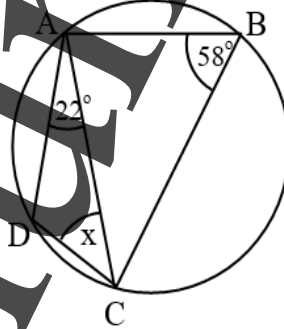
5) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 74°
- ข) 88°
- ค) 106°
- ง) 110°



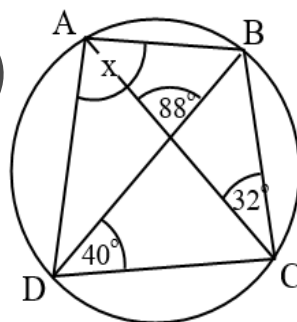
6) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 34°
- ข) 36°
- ค) 42°
- ง) 48°



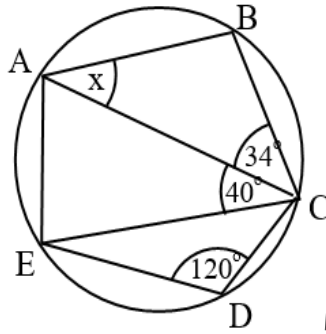
7) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 84°
- ข) 88°
- ค) 94°
- ง) 96°



8) จากรูป จงหาค่า x (สมาคมคณิต๑)

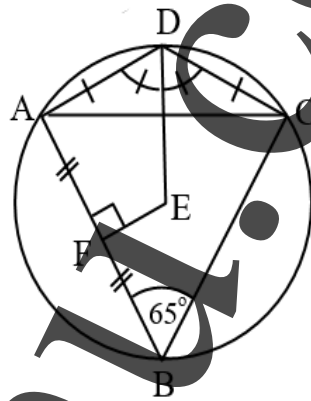
- ก) 56°
- ข) 46°
- ค) 40°
- ง) 27°



9) จากรูป $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{DA} = \overline{DC}$ จงหา $\angle DEF$

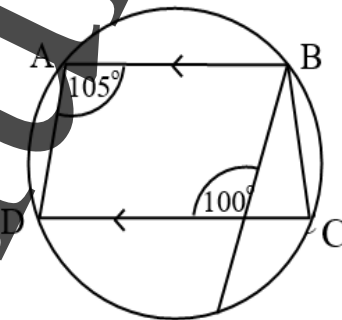
(สมาคมคณิต๑)

- ก) 120°
- ข) 130°
- ค) 140°
- ง) 150°



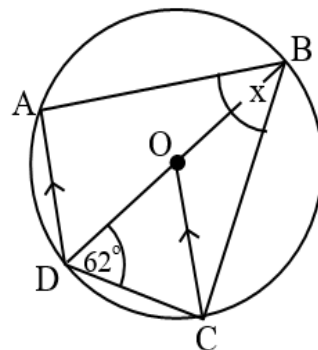
10) จากรูป จงหาค่าของ $\angle ABC$

- ก) 100°
- ข) 105°
- ค) 110°
- ง) 115°



11) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 60°
- ข) 62°
- ค) 64°
- ง) 68°

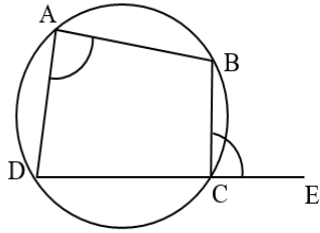


ajinabun.com

หน้า 28 - 32
มีในเอกสารตัวเต็ม

คุณสมบัติที่ 5

ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะเท่ากับมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามกัน



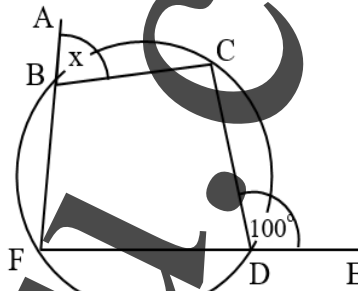
จากรูป

$BCE = DAB$

แบบฝึกหัดที่ 5

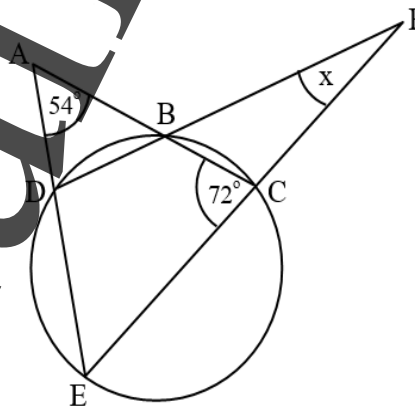
1) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 100°
- ข) 90°
- ค) 80°
- ง) 70°



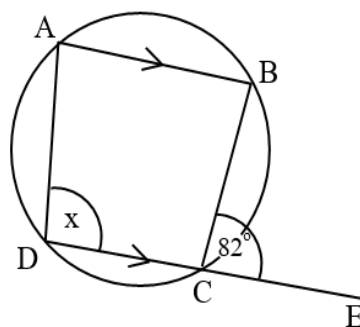
2) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 22°
- ข) 20°
- ค) 18°
- ง) 16°



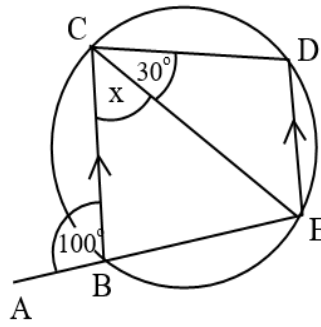
3) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 82°
- ข) 98°
- ค) 100°
- ง) 102°



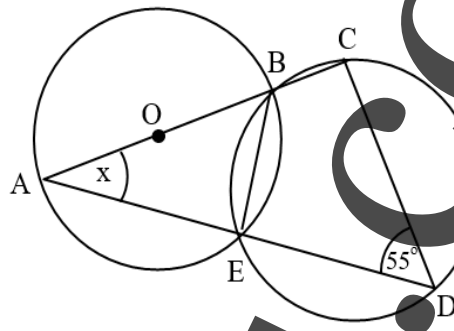
4) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 50°
- ข) 55°
- ค) 60°
- ง) 80°



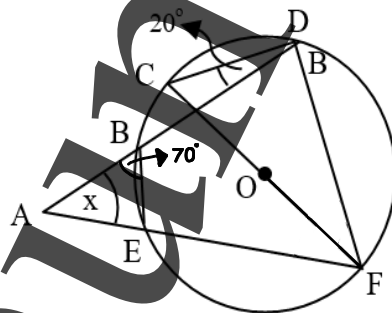
5) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 55°
- ข) 40°
- ค) 45°
- ง) 35°



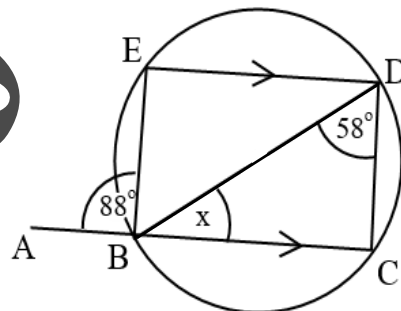
6) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 20°
- ข) 30°
- ค) 35°
- ง) 40°



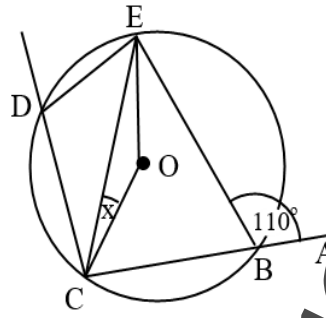
7) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 28°
- ข) 30°
- ค) 44°
- ง) 46°



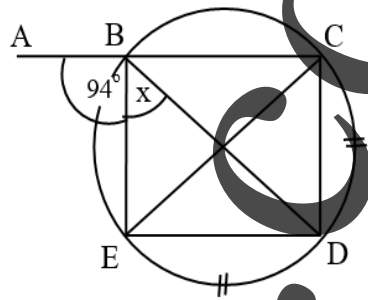
8) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 10°
- ข) 15°
- ค) 20°
- ง) 30°



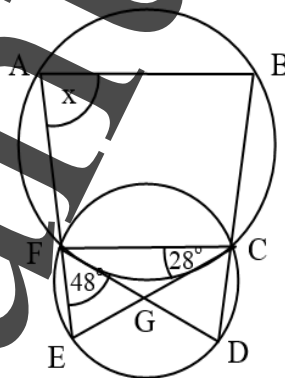
9) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 43°
- ข) 46°
- ค) 47°
- ง) 52°

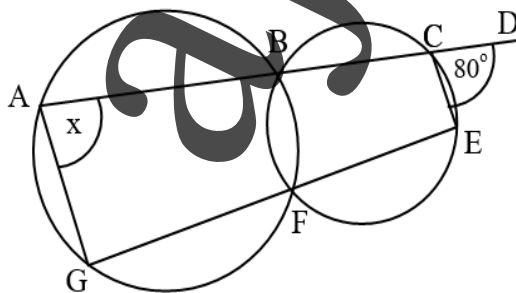


10) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 76°
- ข) 84°
- ค) 98°
- ง) 104°



11) จากรูป จงหาค่า x



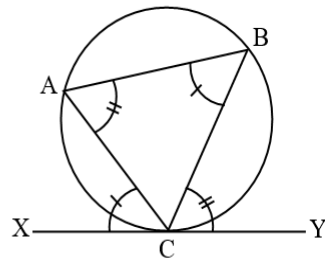
- ก) 100°
- ข) 90°
- ค) 80°
- ง) 75°

ajinabun.com

หน้า 36 - 39
มีในเอกสารตัวเต็ม

คุณสมบัติที่ 6

มุมที่เกิดระหว่างเส้นสัมผัสกับคอร์ดที่จุดสัมผัส จะเท่ากับมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้าม



จากรูป

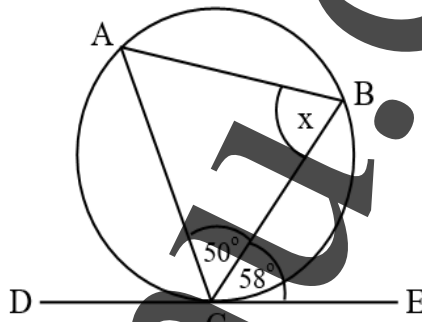
$$\begin{aligned} \widehat{XCA} &= \widehat{ABC} \\ \widehat{YCB} &= \widehat{BAC} \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดที่ 6

๑ ตอนที่ 1

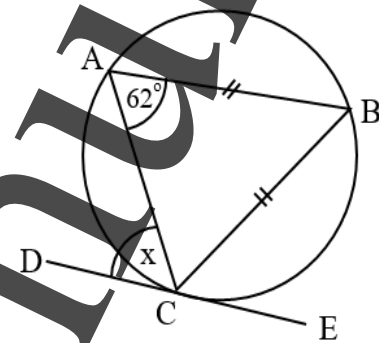
1) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 58°
- ข) 64°
- ค) 68°
- ง) 72°



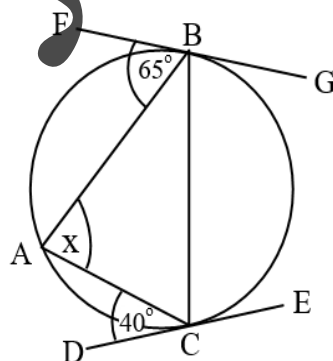
2) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 68°
- ข) 62°
- ค) 60°
- ง) 56°



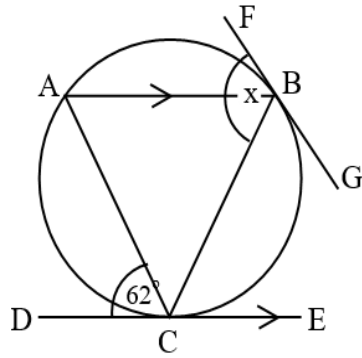
3) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 40°
- ข) 65°
- ค) 75°
- ง) 80°



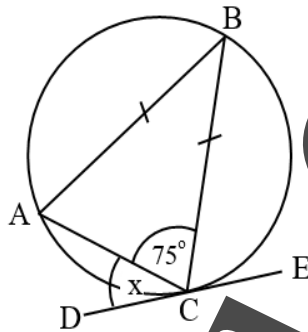
4) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 124°
- ข) 120°
- ค) 118°
- ง) 116°



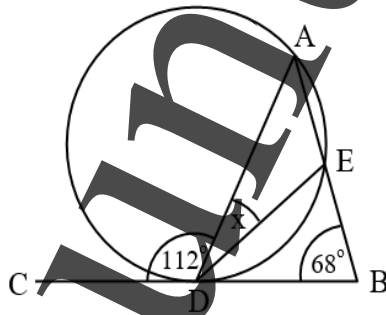
5) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 20°
- ข) 25°
- ค) 30°
- ง) 35°

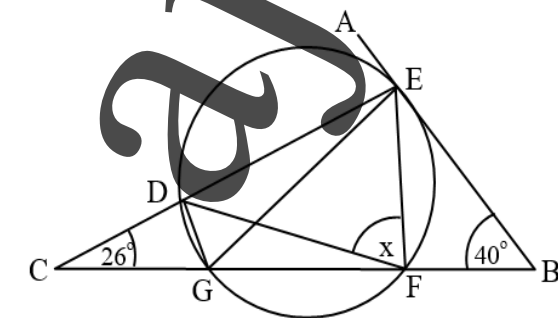


6) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 22°
- ข) 23°
- ค) 24°
- ง) 26°

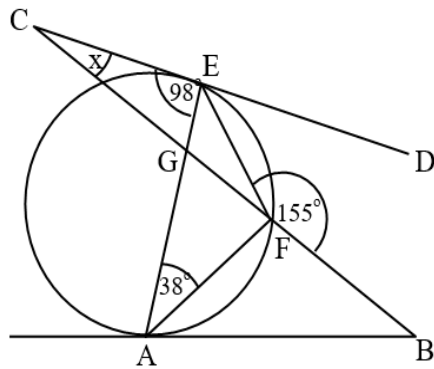


7) จากรูป จงหาค่า x



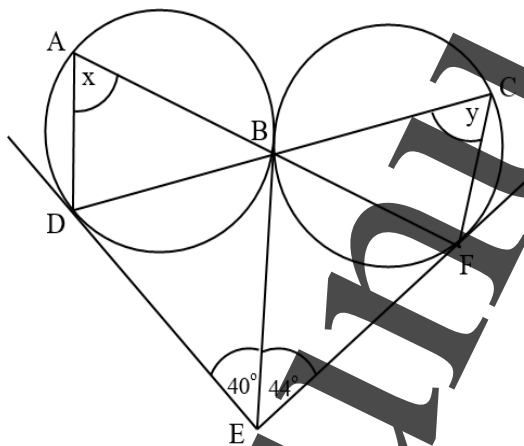
- ก) 14°
- ข) 38°
- ค) 48°
- ง) 66°

8) จากรูป จงหาค่า x



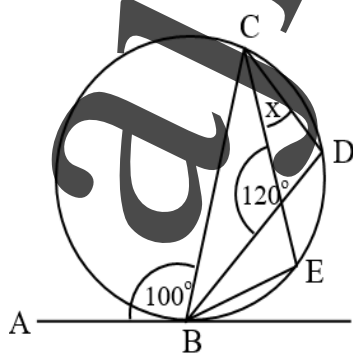
- ก) 13° ข) 14° ค) 15° ง) 16°

9) จากรูป จงหาค่า $x + y$



- ก) 84° ข) 126° ค) 138° ง) 142°

10) จากรูป จงหาค่า x

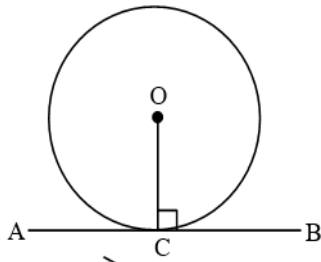


- ก) 10° ข) 15° ค) 20° ง) 30°

หน้า 43 - 54
มีในเอกสารตัวเต็ม

ajinabun.com

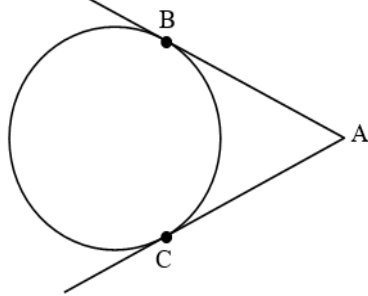
คุณสมบัติที่ 7



เส้นสัมผัสของวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส

จะได้ ;

$$\overline{OC} \perp \overline{AB}$$

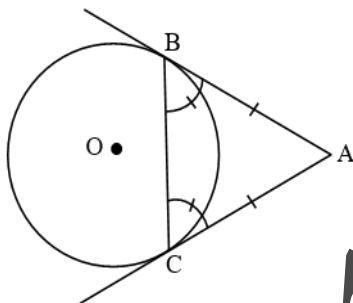


เส้นสัมผัสที่ลากจากจุดภายนอกวงกลมจุดหนึ่งมาสัมผัสวงกลมเดียวกันย่อมยาวเท่ากัน

จะได้ ;

$$\overline{AB} = \overline{AC}$$

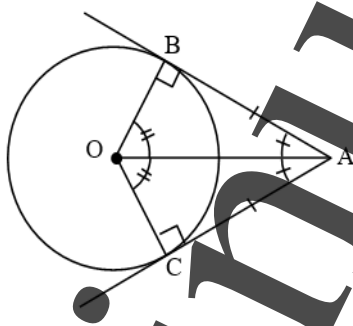
เพิ่มเติม



\overline{AB} และ \overline{AC} เป็นเส้นสัมผัสวงกลม O ที่จุด B และ C ตามลำดับ $\overline{AB} = \overline{AC}$ เมื่อลาก \overline{BC} จะทำให้เกิดสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC

จะได้ ;

$$\angle B = \angle C$$

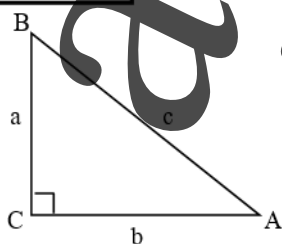


\overline{AB} และ \overline{AC} เป็นเส้นสัมผัสวงกลม O ที่จุด B และ C $\overline{AB} = \overline{AC}$, \overline{OB} และ \overline{OC} ตั้งฉากกับ \overline{AB} และ \overline{AC} เมื่อลากส่วนของเส้นตรง OA จะแบ่งครึ่งมุม $\angle BOC$ และ $\angle BAC$ และจะทำให้เกิดสามเหลี่ยม 2 รูป ที่เท่ากันทุกประการ คือ สามเหลี่ยม ABO กับ ACO

จะได้ ;

$$\angle BOA = \angle COA, \angle BAO = \angle CAO$$

ทฤษฎีพีทาโกรัส



กำหนดให้ สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก \overline{AB} ยาว c หน่วย, \overline{BC} ยาว a หน่วย, \overline{AC} ยาว b หน่วย

จะได้ ;

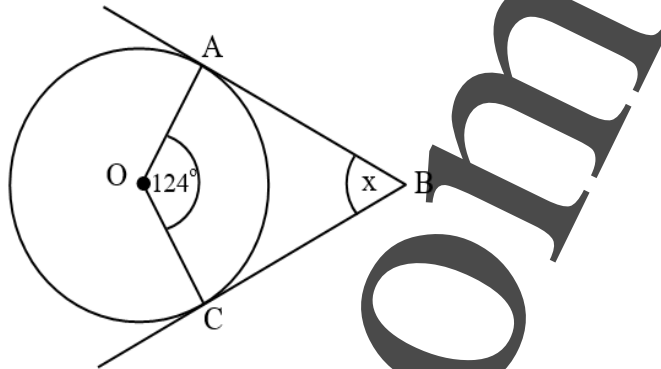
$$a^2 + b^2 = c^2$$

แบบฝึกหัดที่ 7

๑ ตอนที่ 1

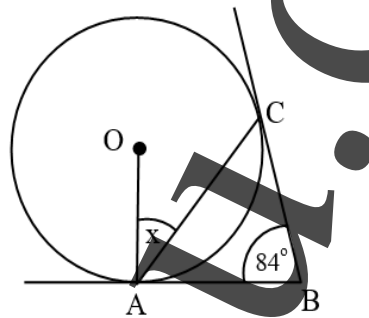
1) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 56°
- ข) 60°
- ค) 62°
- ง) 64°



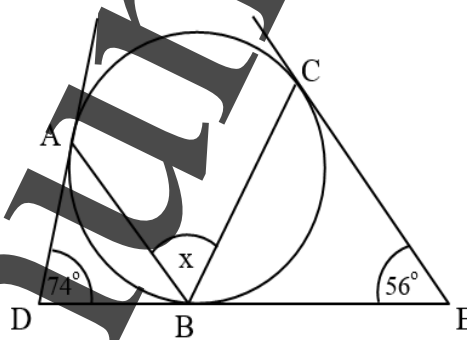
2) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 42°
- ข) 44°
- ค) 46°
- ง) 48°



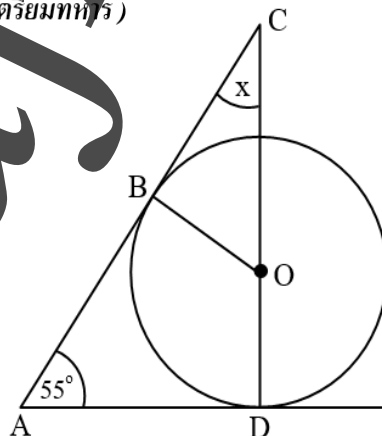
3) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 56°
- ข) 65°
- ค) 74°
- ง) 78°



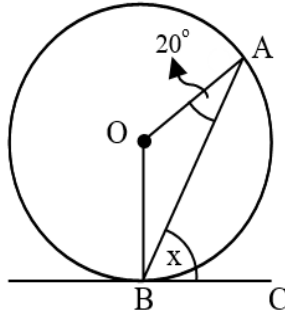
4) จากรูป จงหาค่า x (แนวเตรียมทหาร)

- ก) 55°
- ข) 50°
- ค) 45°
- ง) 35°



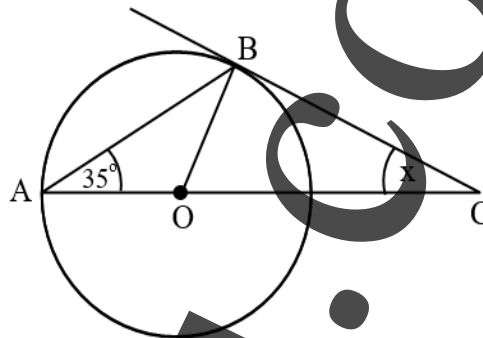
5) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 70°
- ข) 65°
- ค) 60°
- ง) 40°



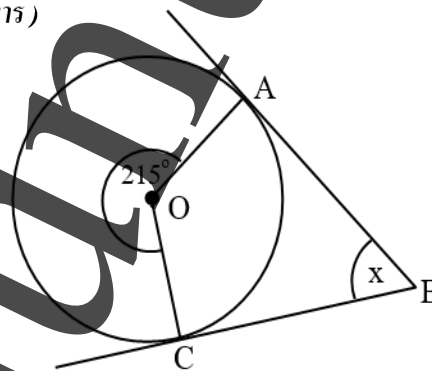
6) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 10°
- ข) 15°
- ค) 20°
- ง) 25°



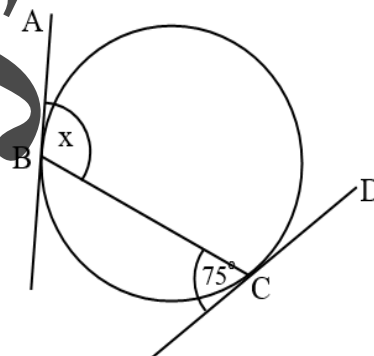
7) จากรูป จงหาค่า x (แนวเตรียมทหาร)

- ก) 30°
- ข) 35°
- ค) 40°
- ง) 45°



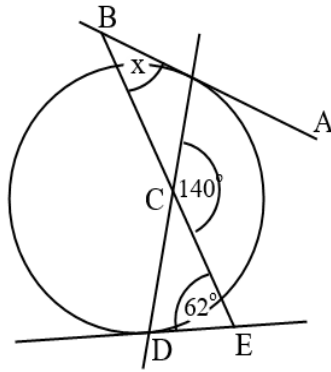
8) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 150°
- ข) 120°
- ค) 115°
- ง) 105°



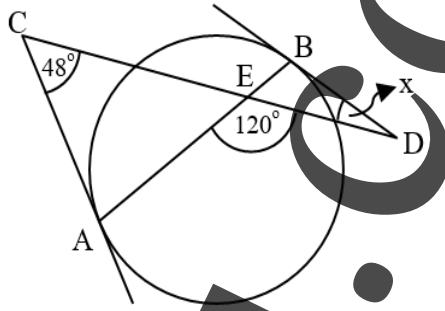
9) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 31°
- ข) 34°
- ค) 36°
- ง) 38°



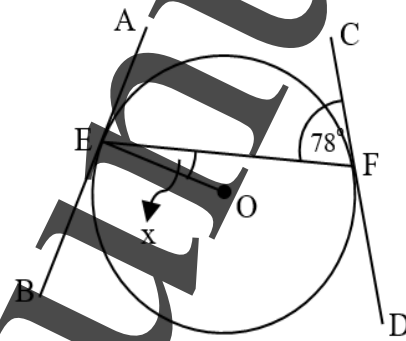
10) จากรูป จงหาค่า x (แนวเตรียมทหาร)

- ก) 12°
- ข) 14°
- ค) 18°
- ง) 22°



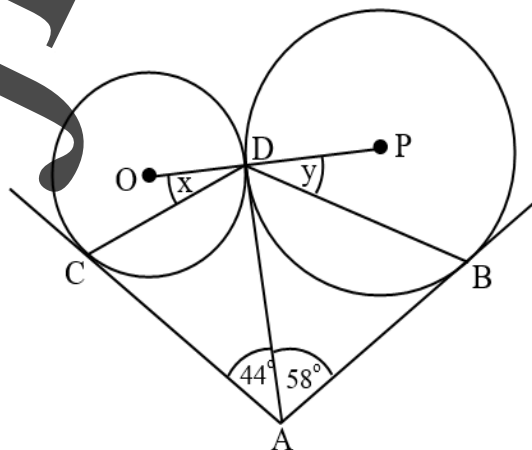
11) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 10°
- ข) 12°
- ค) 14°
- ง) 16°



12) จากรูป วงกลม O, P เป็นวงกลมที่สัมผัสกันที่จุด D มี \overline{AB} , \overline{AD} , \overline{AC} สัมผัสวงกลม จงหาค่าของ $x + y$

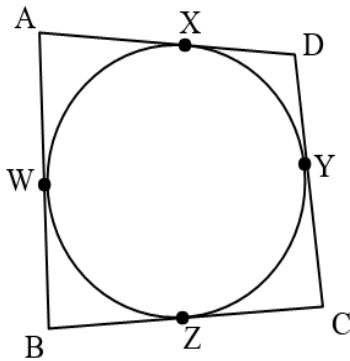
- ก) 49°
- ข) 50°
- ค) 51°
- ง) 52°



หน้า 59 - 70
มีในเอกสารตัวเต็ม

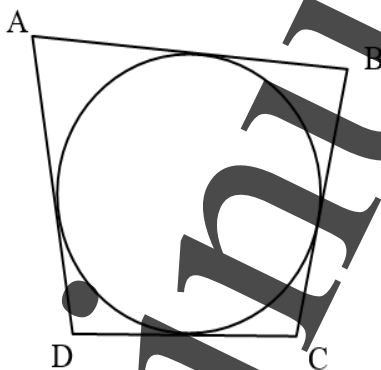
ajinabun.com

- 5) วงกลมบรรจุในรูปสี่เหลี่ยม ABCD มี \overline{AB} ยาว 12 หน่วย, $\overline{AX} = \overline{CZ}$, ความยาวรอบรูปของสี่เหลี่ยม ABCD เท่ากับ 38 หน่วย จงหาค่าของ $\overline{AW} + \overline{DY}$ ยาวเท่าไร



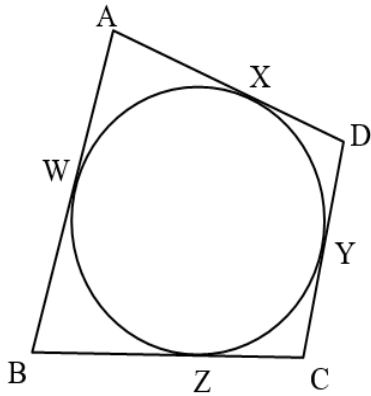
- ก) 5 หน่วย
- ข) 6 หน่วย
- ค) 7 หน่วย
- ง) 8 หน่วย

- 6) จากรูป จงหาความยาวของ \overline{AD} ยาวเท่าไร กำหนดให้ \overline{AB} ยาว 3.5 หน่วย, \overline{BC} ยาว 3 หน่วย, \overline{CD} ยาว 2.5 หน่วย



- ก) 2.5 หน่วย
- ข) 3 หน่วย
- ค) 3.5 หน่วย
- ง) 4 หน่วย

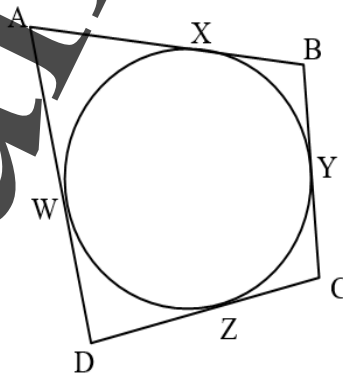
- 7) จากรูป ความยาวเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยม ABCD เท่ากับ 36 หน่วย $\overline{AW} = 2(\overline{CY})$, \overline{AD} ยาวกว่า \overline{BC} อยู่ 3 หน่วย จงหา \overline{AD} ยาวกี่หน่วย



- ก) 6.5 หน่วย
- ข) 7 หน่วย
- ค) 7.5 หน่วย
- ง) 10.5 หน่วย

- 8) ข้อใดกล่าวถูกต้อง

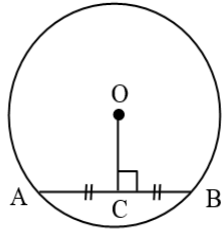
- ก) $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$
- ข) $\overline{AB} + \overline{CD} < \overline{BC} + \overline{AD}$
- ค) $\overline{AB} + \overline{CD} > \overline{BC} + \overline{AD}$
- ง) ไม่มีข้อใดถูกต้อง



หน้า 73 - 76
มีในเอกสารตัวเต็ม

ajinabun.com

คุณสมบัติที่ 8 ถ้าลากส่วนของเส้นตรงจากจุดศูนย์กลางของวงกลมไปตั้งฉากกับคอร์ดที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลางแล้วส่วนของเส้นตรงนั้นจะแบ่งครึ่งคอร์ด



จะได้ ;

$$\overline{AC} = \overline{BC}$$

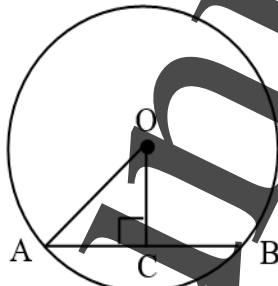
เสริม

คอร์ด 2 คอร์ดที่ยาวเท่ากัน จะมีระยะห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะเท่ากัน ในทางกลับกัน ถ้าคอร์ดสองคอร์ดมีระยะห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะเท่ากันแล้วคอร์ดสองคอร์ดนั้นจะยาวเท่ากันด้วย

แบบฝึกหัดที่ 8

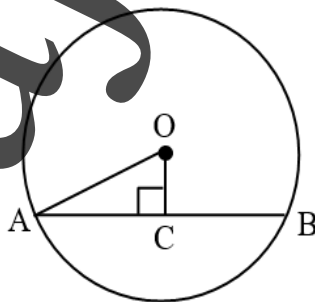
1) จากรูป \overline{OC} ยาว 6 หน่วย, \overline{AB} ยาว 16 หน่วย จงหา \overline{AO} ยาวเท่าไร

- ก) 6 หน่วย
- ข) 8 หน่วย
- ค) 10 หน่วย
- ง) 12 หน่วย



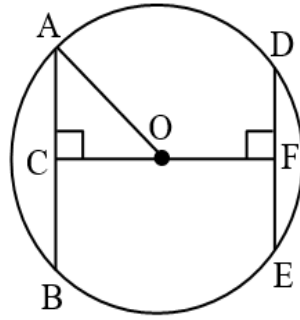
2) จากรูป \overline{OA} ยาว 13 หน่วย, \overline{OC} ยาว 5 หน่วย จงหา \overline{AB} ยาวเท่าไร

- ก) 12 หน่วย
- ข) 18 หน่วย
- ค) 24 หน่วย
- ง) 26 หน่วย



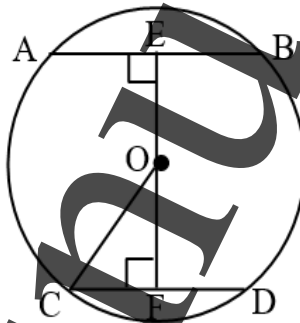
3) จากรูป \overline{AB} ยาว 48 หน่วย, \overline{AO} ยาว 40 หน่วย, \overline{CF} ยาว 56 หน่วย จงหา \overline{DE} ยาวเท่าไร

- ก) 48 หน่วย
- ข) 54 หน่วย
- ค) 64 หน่วย
- ง) 70 หน่วย



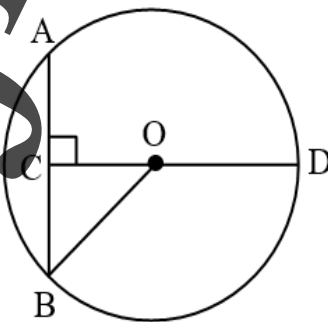
4) จากรูป $\overline{AB} = \overline{CD} = 12$ หน่วย, $\overline{EF} = 5$ หน่วย, จงหา \overline{OC} ยาวเท่าไร

- ก) 5.5 หน่วย
- ข) 6 หน่วย
- ค) 6.5 หน่วย
- ง) 7 หน่วย



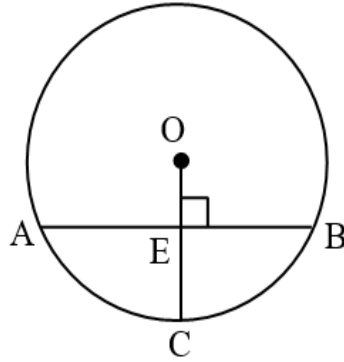
5) จากรูป $\overline{AB} = \overline{CD} = 24$ หน่วย จงหา \overline{OB} ยาวเท่าไร

- ก) 8 หน่วย
- ข) 10 หน่วย
- ค) 12 หน่วย
- ง) 15 หน่วย



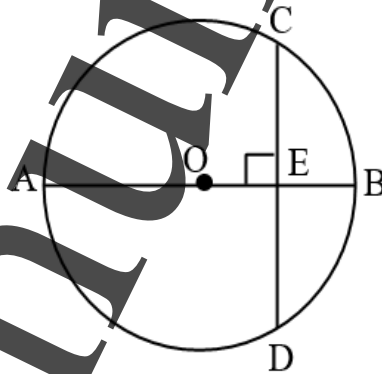
6) จากรูป $\overline{AB} = 24$ หน่วย, \overline{EC} ยาว 8 หน่วย จงหา ความยาวรัศมีวงกลม ยาวกี่หน่วย

- ก) 12 หน่วย
- ข) 13 หน่วย
- ค) 14 หน่วย
- ง) 15 หน่วย



7) จากรูป $\overline{AB} = 10$ หน่วย, $\overline{EB} = 2$ หน่วย จงหา \overline{DE} ยาวเท่าไร

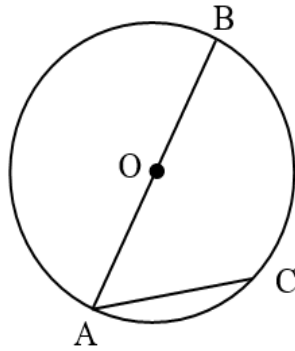
- ก) 2 หน่วย
- ข) 2.5 หน่วย
- ค) 3 หน่วย
- ง) 4 หน่วย



หน้า 80 - 86
มีในเอกสารตัวเต็ม

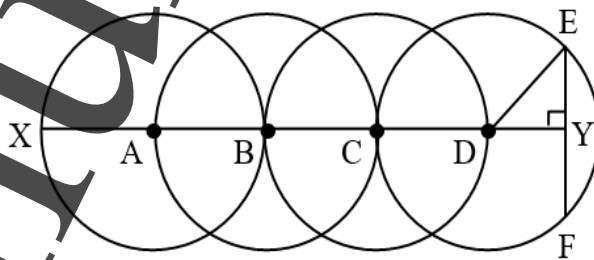
22) จากรูป $\overline{AO} = \overline{AC} = 6$ หน่วย จงหาจุด O อยู่ห่างจาก \overline{AC} เท่าไร

- ก) $\sqrt{3}$ หน่วย
- ข) $2\sqrt{3}$ หน่วย
- ค) $3\sqrt{3}$ หน่วย
- ง) $4\sqrt{3}$ หน่วย



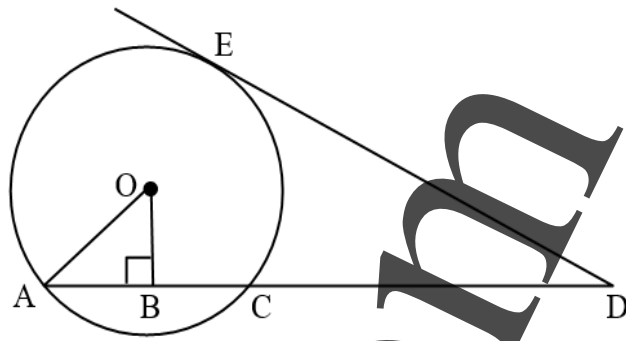
23) จากรูป A, B, C, D เป็นจุดศูนย์กลางกลางของวงกลม 4 วง ที่มีรัศมีเท่ากัน ถ้า $DE = 13$ หน่วย และ EF เป็นคอร์ดยาว 24 หน่วย จงหา XY ยาวกี่หน่วย (แนวเตรียมทหาร)

- ก) 52 หน่วย
- ข) 54 หน่วย
- ค) 56 หน่วย
- ง) 57 หน่วย



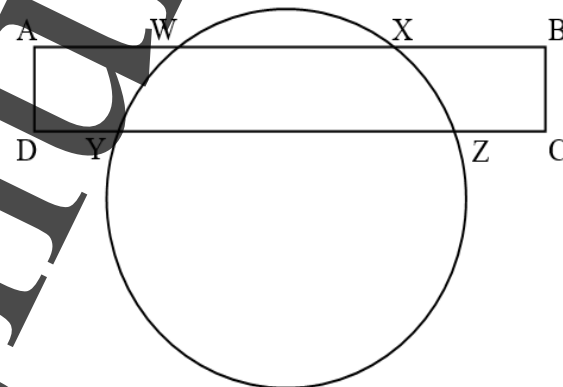
24) จากรูป จงหาความยาวของ \overline{DE} ยาวเท่าไร เมื่อกำหนดให้ $\overline{OA} = 10$ หน่วย, $\overline{OB} = 6$ หน่วย, $\overline{CD} = 20$ หน่วย

- ก) $6\sqrt{5}$ หน่วย
- ข) $8\sqrt{5}$ หน่วย
- ค) $10\sqrt{5}$ หน่วย
- ง) $12\sqrt{5}$ หน่วย



25) สี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD ตัดวงกลมที่จุด W, X, Y, Z ดังรูป ถ้า $\overline{AW} = 6$ หน่วย, $\overline{DY} = 4$ หน่วย, $\overline{YZ} = 16$ หน่วย จงหา \overline{WX} ยาวเท่าไร (สมมติคณิต 1)

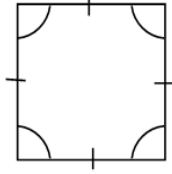
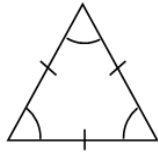
- ก) 10 หน่วย
- ข) 12 หน่วย
- ค) 14 หน่วย
- ง) 16 หน่วย



ajmanuaj.com
หน้า 89
มีในเอกสารตัวเต็ม

คุณสมบัติที่ 9 การสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า หมายถึง รูปที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน และมุมทุกมุมมีขนาดเท่ากัน เช่น



สามเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

สี่เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

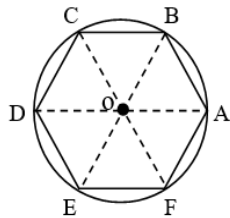
ห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

หกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

การสร้างรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าจากวงกลม

- 1) แบ่งมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมออกเป็น n ส่วนเท่าๆ กัน ตามรูป n เหลี่ยมที่ต้องการสร้างจะได้มุมละ $\frac{360}{n}$ องศา
- 2) ลากรัศมีของวงกลมทำมุมกัน $\frac{360}{n}$ องศา
- 3) ลากเส้นตรงเชื่อมจุดที่รัศมีตัดเส้นรอบวงของวงกลม ก็จะได้รูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

ตัวอย่าง การสร้างรูป 6 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า



ขั้นตอนที่ 1 ใช้จุด O เป็นจุดศูนย์กลาง โดยมี \overline{OA} เป็นรัศมี

ขั้นตอนที่ 2 แบ่งมุมรอบจุด O ออกเป็น 6 มุมเท่าๆ กัน โดยใช้ไม้โปรแทรกเตอร์

$$\text{สร้างมุมละ } \frac{360}{6} = 60 \text{ องศา}$$

ขั้นตอนที่ 3 ลากเส้นตรงจากจุด O ไปยังเส้นรอบวงตามขนาดมุมที่แบ่งเอาไว้ จะได้จุด A, B, C, D, E, F

ขั้นตอนที่ 4 ลาก \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} , \overline{EF} , \overline{FA} จะได้รูป 6 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าตามต้องการ

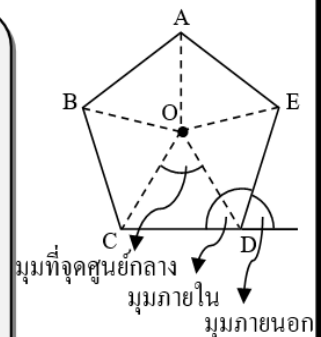
ผลบวกของมุมภายในรูป n เหลี่ยม = $180(n - 2)$

ขนาดของมุมภายในรูป n เหลี่ยมด้านเท่า = $\frac{180(n - 2)}{n}$

ขนาดของมุมภายนอกในรูป n เหลี่ยมด้านเท่า = $180 - \text{มุมภายใน}$

ขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางรูป n เหลี่ยมด้านเท่า = ขนาดของมุมภายนอก = $\frac{360}{n}$

จำนวนเส้นทแยงมุมรูป n เหลี่ยม = $\frac{n}{2}(n - 3)$



* ผลรวมมุมภายนอกทั้งหมดของรูปเหลี่ยมใดๆก็ตามรวมกันได้ 360° *

แบบฝึกหัดที่ 9

1) จงเติมคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

n เหลี่ยมด้าน เท่ามุมเท่า	ผลบวก มุมภายใน	ขนาด มุมภายใน	ขนาด มุมภายนอก	ขนาด มุมที่จุดศูนย์กลาง	จำนวน เส้นทแยงมุม
3 เหลี่ยม					
4 เหลี่ยม					
5 เหลี่ยม					
6 เหลี่ยม					
7 เหลี่ยม					
8 เหลี่ยม					
9 เหลี่ยม					
10 เหลี่ยม					
11 เหลี่ยม					
12 เหลี่ยม					

2) ถ้ามุมภายนอกมุมหนึ่งของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่งเท่ากับ 15 องศา จงหาว่ารูปหลายเหลี่ยมนั้นเป็นรูปกี่เหลี่ยม (แนวเตรียมทหาร)

- ก) 18 เหลี่ยม ข) 20 เหลี่ยม ค) 22 เหลี่ยม ง) 24 เหลี่ยม

3) รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า มีมุมภายในกลาง 156 องศา เป็นรูปกี่เหลี่ยม

- ก) 15 เหลี่ยม ข) 14 เหลี่ยม ค) 13 เหลี่ยม ง) 12 เหลี่ยม

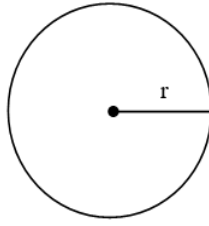
4) จงหาจำนวนเส้นทแยงมุมรูป 25 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีกี่เส้น

- ก) 225 เส้น ข) 250 เส้น ค) 275 เส้น ง) 300 เส้น

หน้า 92 - 95
มีในเอกสารตัวเต็ม

ajinabun.com

คุณสมบัติที่ 10 ความยาวของเส้นรอบวงและพื้นที่ของวงกลม

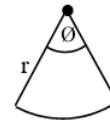
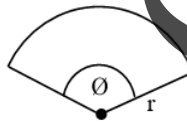
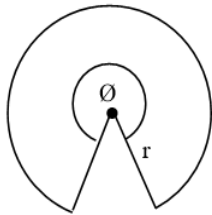


$$\text{ความยาวของเส้นรอบวง} = 2\pi r$$

$$\text{พื้นที่วงกลม} = \pi r^2$$

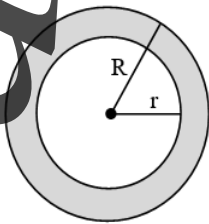
r = ความยาวรัศมีวงกลม

$\pi \approx \frac{22}{7}$ หรือ 3.14 (π อ่านว่า พาย)



$$\text{พื้นที่ของส่วนของวงกลม (เซกเตอร์)} = \frac{\theta}{360} (\pi r^2)$$

$$\text{ความยาวของส่วนโค้งของวงกลม (เซกเตอร์)} = \frac{\theta}{360} (2\pi r)$$

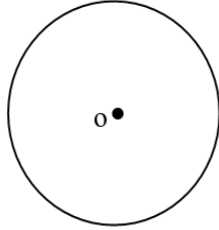


$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ของวงแหวน} &= \text{พื้นที่วงกลมใหญ่} - \text{พื้นที่วงกลมเล็ก} \\ &= \pi R^2 - \pi r^2 \\ &= \pi(R^2 - r^2) \end{aligned}$$

$$\text{พื้นที่ของวงแหวน} = \pi(R^2 - r^2)$$

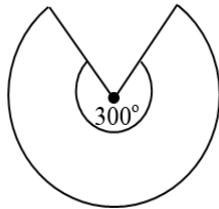
แบบฝึกหัดที่ 10

- 1) จากรูป จงหาพื้นที่และความยาวรอบรูปของวงกลม O เมื่อกำหนดให้รัศมียาว 7 เซนติเมตร ($\pi = \frac{22}{7}$)



พื้นที่วงกลม = _____ ตารางเซนติเมตร
 ความยาวรอบรูป = _____ เซนติเมตร

- 2) จากรูป จงหาพื้นที่และความยาวของส่วนของส่วนโค้งของวงกลม O เมื่อกำหนดให้ รัศมียาว 4.2 เซนติเมตร ($\pi = \frac{22}{7}$)



พื้นที่ส่วนของวงกลม = _____ ตารางเซนติเมตร
 ความยาวส่วนโค้งของวงกลม = _____ เซนติเมตร

- 3) จงหาพื้นที่ของวงแหวน กำหนดให้วงกลมใหญ่และวงกลมเล็กมีรัศมี 14, 7 หน่วยตามลำดับ ($\pi = \frac{22}{7}$)

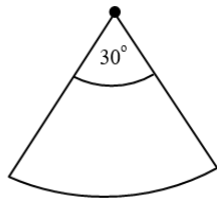


พื้นที่วงแหวน = _____ ตารางหน่วย

- 4) กำหนดให้วงกลมรูปหนึ่งมีพื้นที่ 38.5 ตารางหน่วย จงหาความยาวของรัศมีวงกลมนี้
- ก) 2.5 หน่วย ข) 3 หน่วย ค) 3.5 หน่วย ง) 4 หน่วย

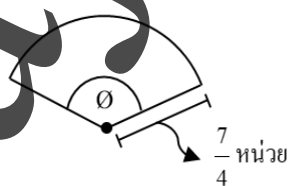
- 5) กำหนดให้วงกลมรูปหนึ่งมีความยาวรอบรูป 154 หน่วย จงหาความยาวของรัศมีวงกลม
- ก) 20 หน่วย ข) 22.5 หน่วย ค) 23.75 หน่วย ง) 24.5 หน่วย

- 6) กำหนดส่วนของวงกลมรูปหนึ่งมีพื้นที่เท่ากับ $\frac{77}{3}$ ตารางหน่วย จงหาความยาวของรัศมีวงกลม



- ก) $5\sqrt{2}$ หน่วย
ข) $6\sqrt{2}$ หน่วย
ค) $7\sqrt{2}$ หน่วย
ง) $8\sqrt{2}$ หน่วย

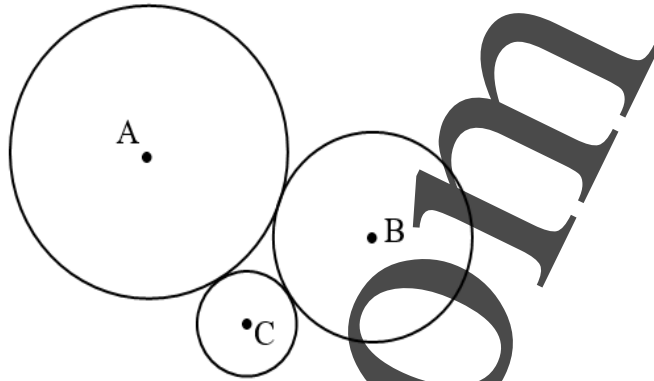
- 7) กำหนดให้ส่วนของวงกลมรูปหนึ่งมีความยาวส่วนโค้งเท่ากับ $\frac{14\pi}{9}$ หน่วย จงหาค่าของ θ องศา



- ก) 120°
ข) 140°
ค) 150°
ง) 160°

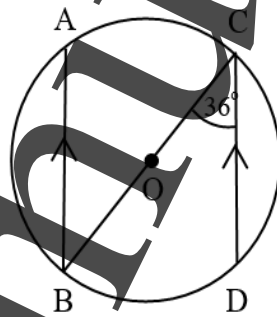
- 8) ให้ A, B, C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม 3 วง สัมผัสซึ่งกันและกัน $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ ยาว 20, 14, 8 หน่วย ตามลำดับ จงหาว่า พื้นที่วงกลม A กับ C ต่างกันเท่าไร

- ก) 424 ตารางหน่วย
ข) 484 ตารางหน่วย
ค) 528 ตารางหน่วย
ง) 564 ตารางหน่วย



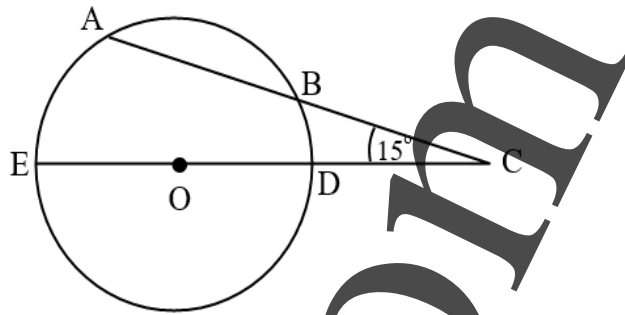
- 9) อยากทราบว่าความยาวส่วนโค้งน้อย AC รวมกับความยาวส่วนโค้งน้อย BD ยาวเป็นเศษส่วนเท่าไรของความยาวเส้นรอบวงกลม O

- ก) $\frac{2}{5}$
ข) $\frac{3}{5}$
ค) $\frac{4}{7}$
ง) $\frac{5}{7}$



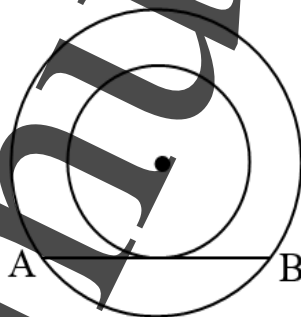
- 10) O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม \overline{BC} มีความยาวเท่ากับรัศมีของวงกลม ส่วนโค้งน้อย AE ยาวเท่าไร ถ้ารัศมีวงกลมยาว 15 ซม. (สมาคมชนิดๆ)

- ก) 15 ซม.
ข) $\frac{15}{2}\pi$ ซม.
ค) 5π ซม.
ง) $\frac{15}{4}\pi$ ซม.



- 11) วงกลม 2 วง ร่วมจุดศูนย์กลางคังรูป มีพื้นที่วงแหวน 8π ตารางนิ้ว เมื่อเขียนคอร์ด AB ของวงกลมใหญ่ให้สัมผัสกับวงกลมเล็ก คอร์ด AB จะยาวกี่นิ้ว (แนวเตรียมอุดม)

- ก) 9 นิ้ว
ข) 12 นิ้ว
ค) 16 นิ้ว
ง) 18 นิ้ว



หน้า 101 - 108
มีในเอกสารตัวเต็ม