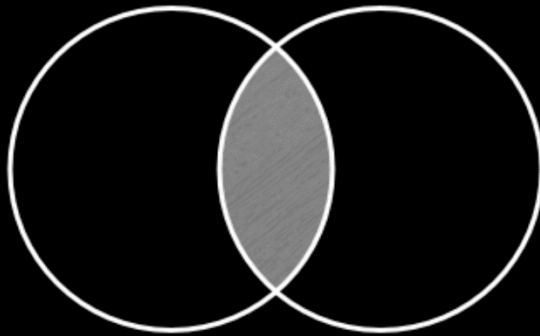


# ตัวอย่างเอกสารประกอบการเรียน

กบ กบ



การหาพื้นที่แรเงาเรขาคณิต

เอกสารตัวเต็มมีจำนวน 42 หน้า

เนื้อหาพร้อมแบบฝึกหัดกว่า 70 ข้อ

[ajnunu.com](http://ajnunu.com)



# เอกสารประกอบการเรียน วิชา คณิตศาสตร์

## การหาพื้นที่แรเงา ของรูปเรขาคณิต

เอกสารนี้เผยแพร่ที่: [ajnunu.com](http://ajnunu.com)

ข้อกำหนดในการใช้เอกสาร: เอกสารประกอบการเรียนนี้เป็นผลงานการเรียบเรียงของ อ.วิษณุ วงศ์ธรรมศิริ ซึ่งได้รับความคุ้มครองตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ ผู้ที่ต้องการเผยแพร่ส่วนหนึ่งส่วนใดของเอกสารนี้ หรือใช้เอกสารนี้ในการประกอบการสอน ต้องได้รับการยินยอมเป็นลายลักษณ์อักษรก่อนเท่านั้น

# สารบัญ

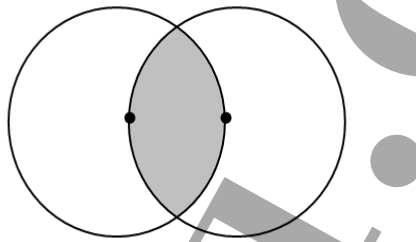
หัวข้อ	หน้า
เนื้อหา	1
แบบฝึกหัดที่ 1	3
แบบฝึกหัดที่ 2	2
แบบฝึกหัดที่ 3	26
แบบฝึกหัดที่ 4	34

# การหาพื้นที่เรขาคณิต

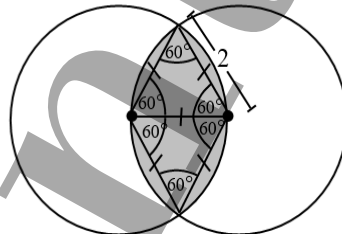
ในบทนี้เป็นบทที่ว่าด้วยเรื่องการหาพื้นที่เรขาคณิต รวบรวมโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับพื้นที่เรขาคณิตซึ่งมักจะออกข้อสอบ โดยที่จะต้องใช้ทักษะเนื้อหาของบทต่าง ๆ ที่ได้ศึกษามาก่อนหน้านี้เข้ามาประยุกต์ใช้ การหาพื้นที่เรขาคณิตนั้นจะแบ่งการหาออกได้เป็น 2 ประเภทใหญ่ ๆ คือ

1. **การหาพื้นที่เรขาคณิตโดยตรง** คือ การหาพื้นที่เรขาคณิตที่โจทย์กำหนดให้โดยพิจารณาว่า ส่วนที่เรขาคณิตนั้นประกอบไปด้วยชิ้นส่วนใดบ้างมาประกอบเป็นพื้นที่เรขาคณิตนั้น ๆ

**ตัวอย่าง** จงหาพื้นที่เรขาคณิตที่กำหนดให้ เมื่อวงกลมทั้งสองวงลากผ่านจุดศูนย์กลางซึ่งกันและกัน และแต่ละวงมีรัศมียาว 2 หน่วย



**วิธีทำ** พิจารณาส่วนพื้นที่เรขาคณิตว่าประกอบไปด้วยชิ้นส่วนใดบ้างที่นำมาประกอบกันเป็นพื้นที่เรขาคณิต

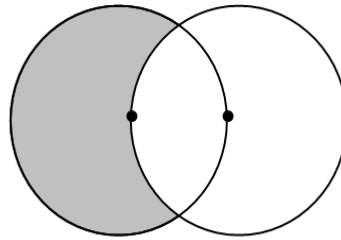


$$\begin{aligned}
 \text{พื้นที่เรขาคณิต} &= 2 \left[ \text{รูปสามเหลี่ยม} \right] + 4 \left[ \text{รูปกึ่งวงกลม} \right] \\
 &= 2 \left[ \text{รูปสามเหลี่ยม} \right] + 4 \left[ \text{รูปกึ่งวงกลม} - \text{รูปสามเหลี่ยม} \right] \\
 &= 2 \left[ \frac{\sqrt{3}}{4} (2)^2 \right] + 4 \left[ \frac{60}{360} \pi (2)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} (2)^2 \right] = 2\sqrt{3} + 4 \left[ \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right] \\
 &= 2\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3} = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} \\
 \therefore \text{พื้นที่เรขาคณิต} &= 2 \left( \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right) \text{ ตารางหน่วย}
 \end{aligned}$$

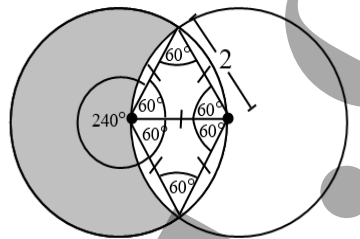


2. การหาพื้นที่แรงแจกโดยอ้อม คือ การหาพื้นที่แรงแจกที่โจทย์กำหนดให้ โดยพิจารณาหาพื้นที่แรงแจกของส่วนที่มากกว่าพื้นที่แรงแจกที่กำหนดให้ หลังจากนั้นจึงค่อยลบพื้นที่ส่วนที่แรงแจกที่ไม่ต้องการออกจนเหมือนพื้นที่แรงแจกตามที่โจทย์ต้องการหา

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่แรงแจกที่กำหนดให้ เมื่อวงกลมทั้งสองวงลากผ่านจุดศูนย์กลางซึ่งกันและกัน และแต่ละวงมีรัศมียาว 2 หน่วย



วิธีทำ พิจารณาส่วนพื้นที่แรงแจกที่มากกว่าโจทย์กำหนดให้ จากนั้นพิจารณาหาพื้นที่ที่ไม่ต้องการแล้วนำไปลบทิ้ง



พื้นที่แรงแจก

$$= \left[ \text{Area of } 240^\circ \text{ sector} \right] - 2 \left[ \text{Area of } 60^\circ \text{ sector} - \text{Area of } \triangle \right]$$

$$= \frac{240}{360} \pi (2)^2 - 2 \left[ \frac{60}{360} \pi (2)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} (2)^2 \right]$$

$$= \frac{8\pi}{3} - 2 \left[ \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right]$$

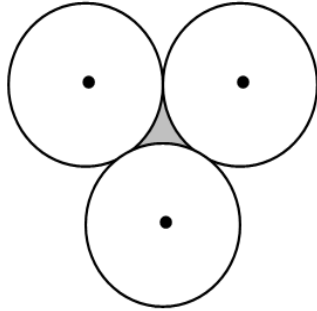
$$= \frac{8\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{พื้นที่แรงแจก} = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} = 2 \left( \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \right) \text{ ตารางหน่วย}$$



## แบบฝึกหัดที่ 1

1) จากรูป วงกลมทั้ง 3 รูป มีรัศมียาว 2 หน่วยเท่ากัน จงหาพื้นที่แรงแจก (สมาคมคณิต ๑) (แนวเตรียมอุดม)



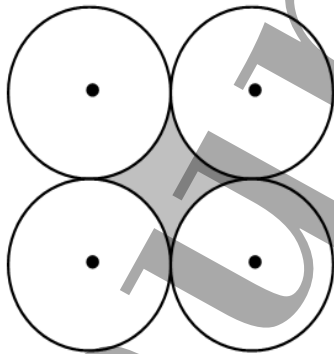
ก.  $2(2\sqrt{3} - \pi)$  ตารางหน่วย

ข.  $2(2\sqrt{3} + \pi)$  ตารางหน่วย

ค.  $4(\sqrt{3} - \pi)$  ตารางหน่วย

ง.  $4(\sqrt{3} - 2\pi)$  ตารางหน่วย

2) จากรูป วงกลมทั้ง 4 รูป มีรัศมียาว  $x$  หน่วย จงหาพื้นที่แรงแจก (แนวเตรียมทหาร)



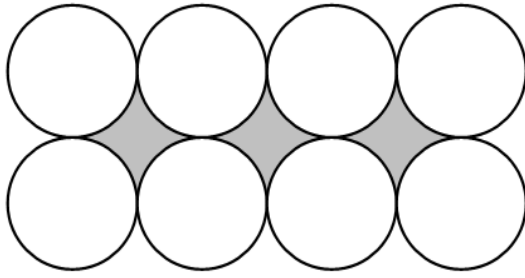
ก.  $x^2(4 + \pi)$  ตารางหน่วย

ข.  $x^2(2 - \pi)$  ตารางหน่วย

ค.  $x^2(4 - \pi)$  ตารางหน่วย

ง.  $x^2(2 + \pi)$  ตารางหน่วย

- 3) กำหนดวงกลม 8 รูป สัมผัสกันตามรูป โดยแต่ละวงมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 2 หน่วย จงหาพื้นที่แรงแจก (สมาคมคณิตฯ)



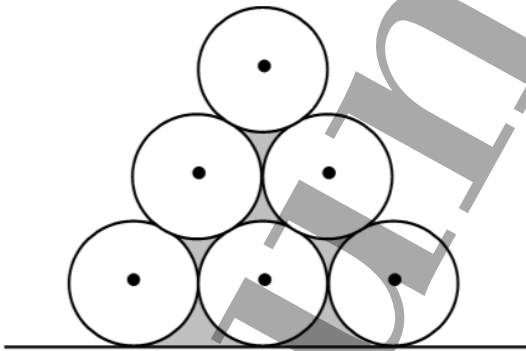
ก.  $12 - 3\pi$  ตารางหน่วย

ข.  $12 - \frac{3\pi}{2}$  ตารางหน่วย

ค.  $15 - 3\pi$  ตารางหน่วย

ง.  $15 - \frac{3\pi}{2}$  ตารางหน่วย

- 4) จากรูป วงกลมแต่ละวงมีรัศมียาว 1 หน่วย จงหาพื้นที่แรงแจก (แนวเตรียมทหาร)



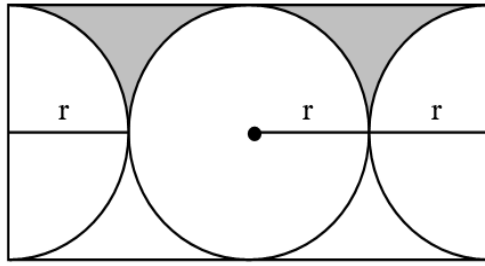
ก.  $2 + 2\sqrt{3} + 3\pi$  ตารางหน่วย

ข.  $2 - 2\sqrt{3} - 3\pi$  ตารางหน่วย

ค.  $4 + 4\sqrt{3} - 3\pi$  ตารางหน่วย

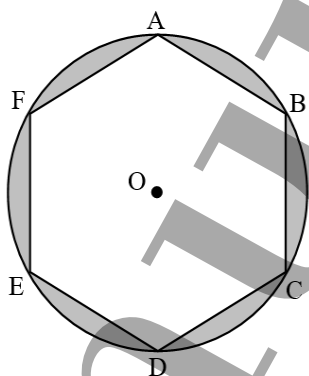
ง.  $4 - 4\sqrt{3} - 3\pi$  ตารางหน่วย

5) จากรูป อัตราส่วนของพื้นที่เงาคือพื้นที่ทั้งหมดเป็นเท่าไร



- ก.  $\frac{4-\pi}{4}$
- ข.  $\frac{4-\pi}{8}$
- ค.  $\frac{8-\pi}{8}$
- ง.  $\frac{2-\pi}{4}$

6) จงหาพื้นที่เงา เมื่อกำหนดให้ ABCDEF เป็นหกเหลี่ยมด้านเท่าที่บรรจุอยู่ในวงกลม O ที่มีรัศมียาว 2 หน่วย



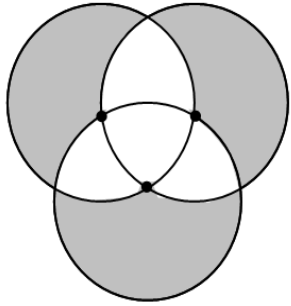
- ก.  $4\pi - \frac{\sqrt{2}}{2}$  ตารางหน่วย
- ข.  $4\pi - \sqrt{2}$  ตารางหน่วย
- ค.  $4\pi - 3\sqrt{3}$  ตารางหน่วย
- ง.  $4\pi - 6\sqrt{3}$  ตารางหน่วย



ajinbunni.com

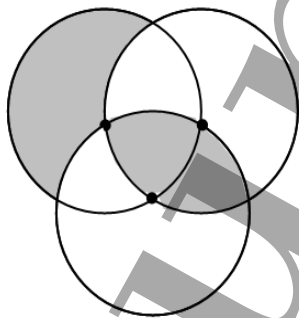
หน้า 6 - 9  
มีในเอกสารตัวเต็ม

15) จากรูป วงกลมทั้ง 3 วง มีรัศมียาว 2 หน่วย จงหาพื้นที่แรงแจก



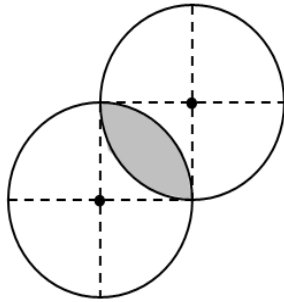
- ก.  $2(\pi + \sqrt{3})$  ตารางหน่วย
- ข.  $2(\pi - 3\sqrt{3})$  ตารางหน่วย
- ค.  $2(\pi - \sqrt{3})$  ตารางหน่วย
- ง.  $2(\pi + 3\sqrt{3})$  ตารางหน่วย

16) จากรูป วงกลมทั้ง 3 วง มีรัศมียาว  $r$  หน่วย จงหาพื้นที่แรงแจก



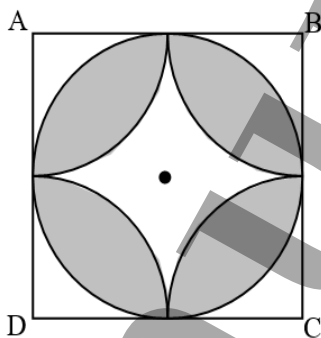
- ก.  $\frac{3\pi r^2}{5}$  ตารางหน่วย
- ข.  $\frac{5\pi r^2}{3}$  ตารางหน่วย
- ค.  $\frac{5\pi r^2}{6}$  ตารางหน่วย
- ง.  $\frac{13\pi r^2}{5}$  ตารางหน่วย

17) กำหนดให้วงกลมสองวงมีรัศมี 2 หน่วย ตัดกันดังรูป จงหาพื้นที่แรงแง (แนวเตรียมอุดม)



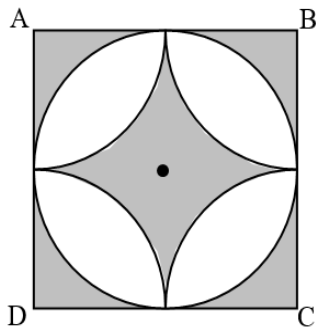
- ก.  $\pi - 4$  ตารางหน่วย
- ข.  $2\pi - 4$  ตารางหน่วย
- ค.  $\frac{\pi}{2} - 1$  ตารางหน่วย
- ง.  $\frac{3\pi}{2} - 1$  ตารางหน่วย

18) จากรูป ABCD เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 7 หน่วย มีวงกลมบรรจุดังรูป มีมุม A, B, C, D เป็นจุดศูนย์กลางของส่วนโค้งของวงกลม จงหาพื้นที่แรงแง (แนวเตรียมอุดม)



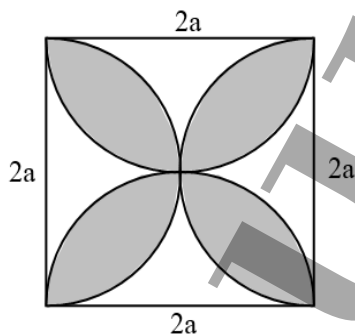
- ก. 26 ตารางหน่วย
- ข. 28 ตารางหน่วย
- ค. 32 ตารางหน่วย
- ง. 36 ตารางหน่วย

- 19) จากรูป ABCD เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ  $a$  หน่วย มีวงกลมบรรจุตั้งรูป มีมุม A, B, C, D เป็นจุดศูนย์กลางส่วนโค้งของวงกลม จงหาพื้นที่แรงแรง



- ก.  $a^2 \left( 2 - \frac{\pi}{2} \right)$  ตารางหน่วย  
 ข.  $a^2 \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right)$  ตารางหน่วย  
 ค.  $a^2 \left( 2 + \frac{\pi}{2} \right)$  ตารางหน่วย  
 ง.  $a^2 (2 - \pi)$  ตารางหน่วย

- 20) จากรูป ด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของครึ่งวงกลมตั้งรูป จงหาพื้นที่แรงแรงที่ตารางหน่วย (สมาคมคณิต ๑) (แนวเตรียมทหาร)

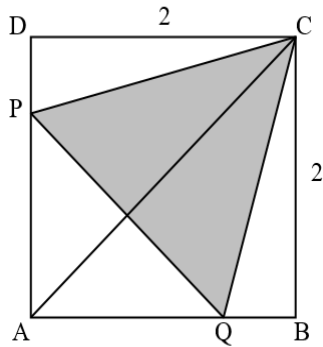


- ก.  $a^2 (\pi - 2)$  ตารางหน่วย  
 ข.  $2a^2 (\pi - 2)$  ตารางหน่วย  
 ค.  $a^2 (\pi - 2\sqrt{2})$  ตารางหน่วย  
 ง.  $2a^2 (\pi - 2\sqrt{2})$  ตารางหน่วย

[ajinbumruj.com](http://ajinbumruj.com)

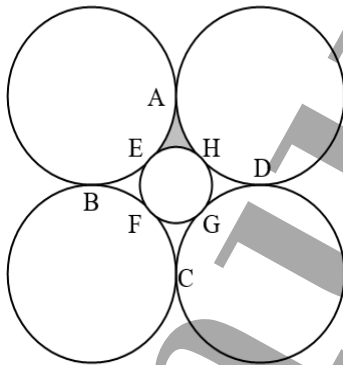
หน้า 13 - 22  
มีในเอกสารตัวเต็ม

- 9) ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 2 หน่วย ถ้า PQC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่บรรจุในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสนี้ จงหาพื้นที่เงา (สมาคมคณิต ๑)



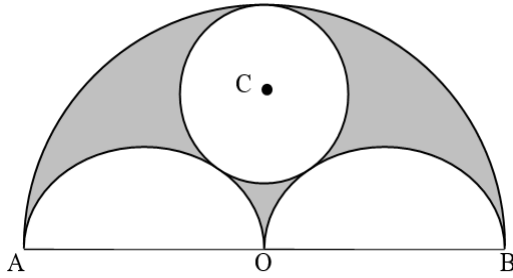
- ก. 1.856 ตารางหน่วย
- ข. 1.972 ตารางหน่วย
- ค. 2.245 ตารางหน่วย
- ง. 2.348 ตารางหน่วย

- 10) วงกลมรัศมี a หน่วย สี่วงสัมผัสกันที่จุด A, B, C และ D และมีวงกลมอีกวงหนึ่งรัศมีน้อยกว่า a หน่วย สัมผัสวงกลมทั้งสี่จุดที่จุด E, F, G และ H ดังรูป พื้นที่ของอาณาบริเวณที่เงาเป็นเท่าไร (สมาคมคณิต ๑)



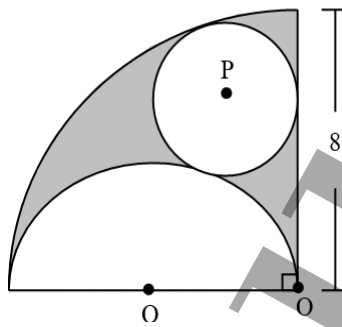
- ก.  $2\sqrt{2}\pi a^2$  ตารางหน่วย
- ข.  $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\pi a^2$  ตารางหน่วย
- ค.  $(2-(1-\sqrt{2})\pi)a^2$  ตารางหน่วย
- ง.  $\left(\frac{2-(2-\sqrt{2})\pi}{2}\right)a^2$  ตารางหน่วย

- 11) จากรูป AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง ยาว 4 หน่วย สร้างครึ่งวงกลม AO และ BO ตามรูป และสร้างวงกลม C สัมผัสครึ่งวงกลมทั้งสอง จงหาพื้นที่ส่วนที่แรงแง (แนวเตรียมอุดม)



- ก.  $\frac{4\pi}{9}$  ตารางหน่วย  
 ข.  $\frac{5\pi}{9}$  ตารางหน่วย  
 ค.  $\frac{7\pi}{9}$  ตารางหน่วย  
 ง.  $\frac{8\pi}{9}$  ตารางหน่วย

- 12) O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมียาว 8 หน่วย จงหาพื้นที่แรงแง



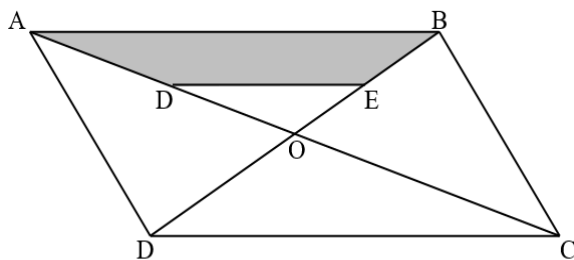
- ก.  $4\pi$  ตารางหน่วย  
 ข.  $5.5\pi$  ตารางหน่วย  
 ค.  $6.5\pi$  ตารางหน่วย  
 ง.  $7\pi$  ตารางหน่วย

[ajinabunbun.com](http://ajinabunbun.com)

หน้า 25 - 30  
มีในเอกสารตัวเต็ม

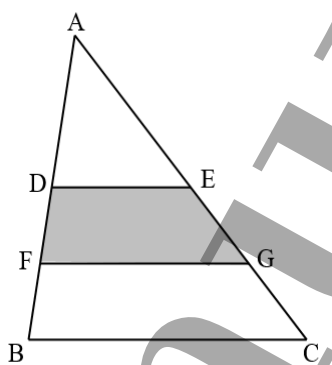


- 11) จากรูป  $\square ABCD$  เป็น  $\square$  ด้านขนาน มีพื้นที่ 32 ตารางหน่วย ถ้า  $\overline{DE}$  เป็นเส้นต่อจุดกึ่งกลางของ  $AO$  และ  $BO$  จงหาพื้นที่แรง



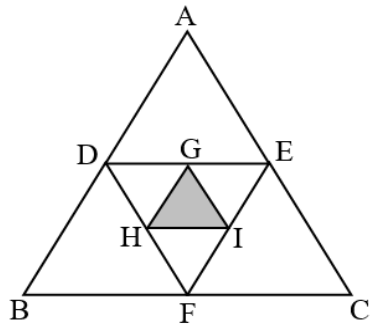
- ก. 4 ตารางหน่วย
- ข. 6 ตารางหน่วย
- ค. 6.4 ตารางหน่วย
- ง. 7.2 ตารางหน่วย

- 12) ให้  $\triangle ABC$  มีจุด  $D$  และ  $E$  เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน  $AB, AC$  ตามลำดับ และมีจุด  $F$  และ  $G$  เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน  $BD, CE$  ตามลำดับ จงหาพื้นที่แรงต่อพื้นที่สามเหลี่ยม  $ABC$



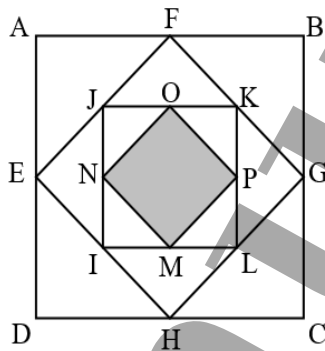
- ก. 1 : 7
- ข. 2 : 13
- ค. 3 : 16
- ง. 5 : 16

- 13) กำหนดให้  $ABC$  เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า มีจุด  $D, E, F, G, H, I$  เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน  $AB, AC, BC, DE, DF, EF$  ตามลำดับ ถ้าสามเหลี่ยม  $ABC$  มีพื้นที่ 36 ตารางหน่วย จงหาพื้นที่แรงแรง



- ก. 2 ตารางหน่วย
- ข. 2.25 ตารางหน่วย
- ค. 3 ตารางหน่วย
- ง. 3.75 ตารางหน่วย

- 14) กำหนดให้  $ABCD$  เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีพื้นที่ 64 ตารางหน่วย จุด  $E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P$  เป็นจุดกึ่งกลางของด้านของสี่เหลี่ยม  $ABCD, EFGH, IJKL$  ตามลำดับ จงหาพื้นที่แรงแรง

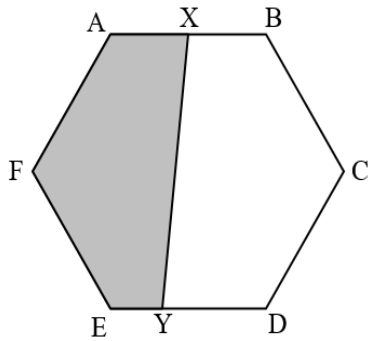


- ก. 8 ตารางหน่วย
- ข.  $12\sqrt{2}$  ตารางหน่วย
- ค. 16 ตารางหน่วย
- ง. 12 ตารางหน่วย

ajinburi.com

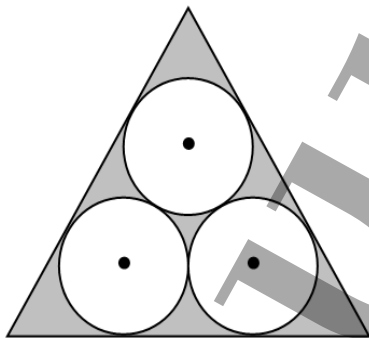
หน้า 33 - 37  
มีในเอกสารตัวเต็ม

- 9) ABCDEF เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่าที่มีพื้นที่ 36 ตารางนิ้ว ถ้า x เป็นจุดบน AB ทำให้  $AB : AX = 2 : 1$  และ Y เป็นจุดบน DE ทำให้  $DY : YE = 3 : 1$  ลาก XY จงหาพื้นที่ของพื้นที่แรงแง (แนวเตรียมอุดม)



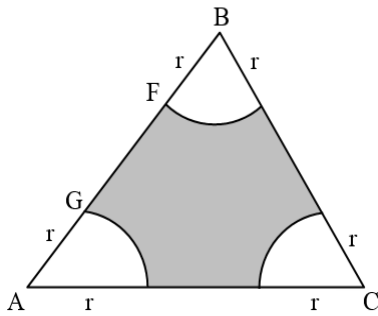
- ก. 12 ตารางนิ้ว  
 ข. 13 ตารางนิ้ว  
 ค. 14 ตารางนิ้ว  
 ง. 15 ตารางนิ้ว

- 10) จากรูป จงหาพื้นที่แรงแง โดยกำหนดให้ วงกลมทั้ง 3 วง มีรัศมียาว x หน่วย (แนวเตรียมทหาร)



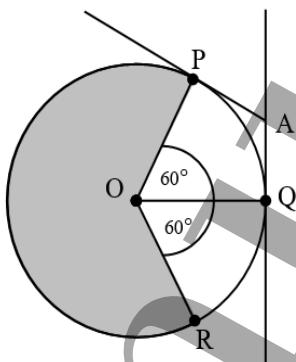
- ก.  $x^2 \left( 4\sqrt{3} + 6 - \frac{\pi}{2} \right)$  ตารางหน่วย  
 ข.  $x^2 \left( 4\sqrt{3} + 6 - \frac{3\pi}{2} \right)$  ตารางหน่วย  
 ค.  $x^2 (4\sqrt{3} + 6 - \pi)$  ตารางหน่วย  
 ง.  $x^2 (4\sqrt{3} + 6 - 3\pi)$  ตารางหน่วย

- 11) จากรูป  $r$  เป็นความยาวของรัศมีของแต่ละเซกเตอร์,  $AC = 16\sqrt{2}$  หน่วย,  $FG = 6$  หน่วย และ  $\angle BAC = 45^\circ$  ถ้า  $r = 8$  หน่วย แล้วพื้นที่ของส่วนที่แรเงาเป็นกี่ตารางหน่วย (สมาคมคณิตฯ)



- ก.  $84 - 12\pi$  ตารางหน่วย  
 ข.  $124 - 16\pi$  ตารางหน่วย  
 ค.  $176 - 32\pi$  ตารางหน่วย  
 ง.  $186 - 48\pi$  ตารางหน่วย

- 12) จากรูปที่กำหนดให้  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม  $\overline{AP}$ ,  $\overline{AQ}$  สัมผัสวงกลม มี  $\angle POQ = \angle ROQ = 60^\circ$  ถ้า  $AP$  ยาว 5 หน่วย แล้ว จงหาพื้นที่แรงแง (สมาคมคณิตฯ)

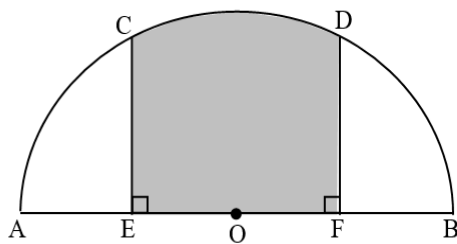


- ก.  $\frac{25\pi}{9}$  ตารางหน่วย  
 ข.  $\frac{50\pi}{9}$  ตารางหน่วย  
 ค.  $25\pi$  ตารางหน่วย  
 ง.  $50\pi$  ตารางหน่วย

ajinbunri.com

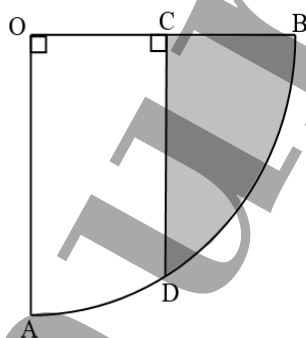
หน้า 40  
มีในเอกสารตัวเต็ม

15) จากรูป ครึ่งวงกลม  $O$  มีรัศมียาว 4 หน่วย  $EO = FO = 2$  หน่วย จงหาพื้นที่ที่แรเงา



- ก.  $4\left(3 + \frac{2\pi}{3}\right)$  ตารางหน่วย
- ข.  $4(3\sqrt{3} + \pi)$  ตารางหน่วย
- ค.  $4\left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right)$  ตารางหน่วย
- ง.  $4\left(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$  ตารางหน่วย

16) กำหนดให้  $OAB$  เป็นส่วนโค้งของวงกลมที่มี  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาว 2 หน่วย  $C$  เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน  $OB$  จงหาพื้นที่ที่แรเงา



- ก.  $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$  ตารางหน่วย
- ข.  $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$  ตารางหน่วย
- ค.  $\frac{3\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$  ตารางหน่วย
- ง.  $2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$  ตารางหน่วย

ajinbunni.com

หน้า 42  
มีในเอกสารตัวเต็ม